



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Dispersione cromatica e propagazione di impulsi laser ultracorti

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Fisica

Francesco Vergari
Matricola 1897620

Relatore
Prof. Tullio Scopigno

Correlatore
Dr. Giovanni Batignani

Anno Accademico 2021/2022

Tesi non ancora discussa

Dispersione cromatica e propagazione di impulsi laser ultracorti
Sapienza Università di Roma

© 2022 Francesco Vergari. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L^AT_EX e la classe Saphthesis.

Email dell'autore: francesco.vergari2000@gmail.com

Indice

1	Introduzione	1
2	Cenni di Elettromagnetismo ed equazione di Helmotz	2
2.1	Richiamo sulle equazioni di Mexwell	2
2.2	Propagazione del campo elettromagnetico nel vuoto	3
2.3	Formalizzazione del problema nello spazio delle frequenze	4
2.4	Derivazione analitica dell'equazione	5
2.5	Sviluppo dell'equazione di Helmotz nel caso di onde quasi monocromatiche	6
3	Propagazione degli impulsi e primo ordine perturbativo	8
3.1	Velocità di fase e velocità di gruppo	8
3.2	Dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza	9
3.3	Soluzione al primo ordine perturbativo per un impulso gaussiano	9
4	Secondo e terzo ordine perturbativo con Group Velocity Dispersion	13
4.1	Cambio di coordinate ed equazione per l'involuppo	13
4.2	Dispersione della velocità di gruppo per un impulso gaussiano	14
4.3	Descrizione della Group Velocity Dispersion	17
4.4	Terzo ordine perturbativo e TOD	19
5	Conclusioni	22

Capitolo 1

Introduzione

Negli ultimi 20 anni la spettroscopia e l'ottica ultraveloce si sono evolute estremamente, strumentazioni e metodi di utilizzo si sono divulgati al punto tale da essere commercializzati e non solo ad essere relegati a far parte di un laboratorio di fisica. L'intero campo di studio è progredito in modo molto rapido aprendo così nuove direzioni per quanto riguarda l'applicazione della spettroscopia ultraveloce, la quale sfrutta gli impulsi ultracorti.

Con 'impulsi ultracorti' si fa riferimento ad impulsi la cui durata è dell'ordine dei femtosecondi ($1fs = 10^{-15}s$), scala diventata accessibile grazie al progredire delle metodologie di misurazione, generazione ed amplificazione degli stessi. Lo studio degli impulsi ultracorti è correlato in particolare a quello dell'interazione di impulsi laser intensi con la materia, ed in particolare con la loro interazione con atomi e molecole costituenti materiali di diversa tipologia andando a creare così un nuovo punto di vista per quanto riguarda l'elettromagnetismo, l'ottica e la meccanica quantistica.([2])

Lo scopo di questa dissertazione è quello di descrivere, attraverso lo sviluppo analitico, gli effetti subiti da un impulso ultracorto durante la sua propagazione in un materiale dielettrico, ed in particolare, l'interesse dell'analisi verrà riservata ad effetti lineari sul campo elettrico nella risposta del materiale a seguito della propagazione. A tale scopo la dissertazione è strutturata secondo il seguente schema:

Nel **capitolo 2** sono riportati cenni di Elettromagnetismo richiamando le equazioni di Maxwell. Attraverso queste ultime si arriva all'espressione dell'equazione di Helmotz, la quale consente di ricavare le equazioni di propagazione per un impulso in un materiale dielettrico perfetto.

Nel **capitolo 3** è riportato lo sviluppo perturbativo al primo ordine dell'equazione di Helmotz, per il quale sono ricavate le equazioni per la propagazione dell'involuppo descrittivi l'impulso propagante. Viene inoltre riportato il calcolo analitico esatto della propagazione di un impulso gaussiano.

Il **capitolo 4** riporta l'analisi dello sviluppo perturbativo al secondo e terzo ordine introducendo la dispersione della velocità di gruppo, effetto comune alle fenomenologie di entrambi gli ordini di sviluppo. Verrà ripreso il caso dell'involuppo gaussiano per una risoluzione analitica e verranno confrontati tra loro gli effetti dei due ordini perturbativi.

Capitolo 2

Cenni di Elettromagnetismo ed equazione di Helmotz

2.1 Richiamo sulle equazioni di Maxwell

L'Elettromagnetismo è la teoria formulata attraverso le equazioni di Maxwell, equazioni differenziali che racchiudono le leggi fondamentali dell'interazione elettromagnetica. Sono riportate di seguito le equazioni espresse nella loro forma più generale.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}\end{aligned}$$

Le sorgenti del campo elettromagnetico (la densità di carica ρ , e la densità di corrente \vec{J}) non sono tra loro indipendenti, in quanto legate tra loro dall'equazione di continuità.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Per quanto riguarda le equazioni di Maxwell sono stati utilizzati due campi ausiliari al fine di descrivere l'effetto della presenza di materia, questi si identificano come:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu} - \vec{M} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\end{aligned}$$

dove \vec{P} e \vec{M} sono i vettori di polarizzazione elettrica e magnetica. All'interno di questa dissertazione ci interesseremo del comportamento relativo a materiali in cui gli effetti di magnetizzazione sono trascurabili, ovvero $\vec{M} \simeq 0$ e quindi dove $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

2.2 Propagazione del campo elettromagnetico nel vuoto

Le equazioni di Maxwell nel vuoto ($\rho = 0, \vec{J} = 0$) si esprimono come:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}\end{aligned}$$

Applicando adesso il rotore alla terza equazione si ricava:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

Sfruttando dunque la prima e la quarta equazione si ricava facilmente:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

ovvero l'equazione delle onde per il campo elettrico; tramite passaggi simili, è possibile derivare un'equazione analoga per il campo di induzione magnetica .

Si ricorda che ϵ_0 (costante dielettrica del vuoto) può essere considerata come il grado di quanto un materiale viene permeato dal campo elettrico in cui è immerso, dove in questo caso il materiale è il vuoto, mentre μ_0 (permeabilità magnetica dello spazio libero) è definita in modo analogo come ciò che definisce la permeabilità del vuoto al campo di induzione magnetica. Per entrambe le costanti si definiscono delle grandezze relative se il materiale permeato non è il vuoto . Si utilizzano adesso due approssimazioni per risolvere l'equazione delle onde; si suppone innanzitutto che la soluzione sia un'onda piana (ad esempio propagante lungo z) e che sia polarizzata linearmente lungo l'asse x ($\vec{E} = (E_x, 0, 0)$). Sfruttando queste considerazioni si osserva facilmente che in questo caso si trova un'equazione della forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x$$

la quale ammette soluzioni tipo

$$E_x = E_0 \sin(zk - t\omega + \epsilon)$$

dove E_0 è l'ampiezza dell'onda, ω è la pulsazione ed ϵ è una fase arbitraria. Chiaramente si ricava una soluzione del tutto analoga nel caso dello studio della natura del campo di induzione magnetica.

Sfruttando le equazioni di Maxwell (in particolare la terza e la quarta), è possibile ricavare alcune importanti proprietà sulla propagazione dei campi sotto le approssimazioni di onda piana monocromatica polarizzata linearmente.

Attraverso l'ausilio della terza equazione si ricava:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{y} \left(\frac{\partial}{\partial z} E_x \right) = -\vec{y} \left(\frac{\partial}{\partial t} (B_x, B_y, B_z) \right)$$

E dunque ovviamente si deducono le seguenti relazioni

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x = -\frac{\partial}{\partial t} B_y$$

$$B_x = B_z = 0$$

Applicando invece la quarta equazione si osserva con procedimenti analoghi:

$$\frac{\partial}{\partial z} B_y = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x$$

Dall'espressione appena riportata si può dedurre che, nel vuoto e con le approssimazioni precedentemente descritte, il campo elettrico e il campo di induzione magnetica, a livello vettoriale, sono ortogonali tra loro ed entrambi i campi sono ortogonali alla propagazione dell'onda elettromagnetica; ciò è facilmente scrivibile analiticamente introducendo \vec{v} , ovvero il vettore di velocità di propagazione, infatti si ricava facilmente:

$$\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{v}$$

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \pm |\vec{v}|$$

2.3 Formalizzazione del problema nello spazio delle frequenze

All'interno di questa sezione, è descritta la propagazione di un'onda elettromagnetica all'interno di un materiale in assenza di sorgenti ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$), quindi in un dielettrico perfetto; focalizzandoci alla terza e quarta equazione di Maxwell, queste risultano come:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

le quali per il caso di onda piana polarizzata linearmente risultano in:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x = -\frac{\partial}{\partial t} B_y$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B_y = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} D_x$$

L'analisi proposta è effettuata attraverso l'ausilio delle trasformate di Fourier e delle loro proprietà.

La motivazione dell'utilizzo di questo strumento, e quindi del passaggio dal dominio del tempo al dominio delle frequenze, risiede nella forma analitica del vettore di polarizzazione (\vec{P}) nel dominio delle frequenze, il quale ricorre nell'espressione del vettore di induzione elettrica (\vec{D}).

La definizione del vettore di polarizzazione è dovuta alla considerazione che, con l'introduzione di un campo elettrico, la distribuzione delle cariche all'interno del materiale viene distorta, cosa che genera momenti dipolo elettrico. L'effetto di questa nuova distribuzione può essere considerato come una componente addizionale al campo elettrico. Il vettore di polarizzazione è considerabile come il dipolo risultante

dall'interazione del campo elettrico per unità di volume. Per quanto riguarda la sua espressione analitica, l'analisi riportata si sviluppa supponendo che la risposta del materiale sia lineare col campo elettrico (risposta del primo ordine), locale e ritardata (presenta un delay); in questa descrizione si ha che il vettore di interesse è esprimibile attraverso la seguente forma:

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t-t') \vec{E}(t') dt'$$

dove χ è una funzione scalare. Sfruttando le proprietà delle trasformate di Fourier, si nota come l'equazione del vettore di polarizzazione possa essere espressa nel dominio delle frequenze come un prodotto di convoluzione. Quindi \vec{P} può essere espresso come:

$$\tilde{P}(\omega) = \epsilon_0 \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\omega)$$

Dove $\tilde{\chi}$ e \tilde{E} sono rispettivamente le trasformate di Fourier della funzione scalare e del campo elettrico. A questo punto è possibile ricavare facilmente le equazioni che legano le componenti del campo elettrico e campo di induzione magnetica precedentemente ricavate nel dominio della frequenza:

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_x = i\omega \tilde{B}_y \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{B}_y = i\omega \mu_0 \tilde{D}_x \quad (2.2)$$

Si riporta a questo punto la forma del vettore di induzione elettrica in funzione del vettore di polarizzazione:

$$\tilde{D}_x = \epsilon_0 \tilde{E}_x + \tilde{P}_x = \epsilon_0 \tilde{E}_x + \epsilon_0 \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \tilde{E}_x(\omega) = \epsilon_0 \tilde{E}_x [1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega)] = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \tilde{E}_x(\omega)$$

dove è stata introdotta $\epsilon_r(\omega)$ come la costante dielettrica relativa, la quale è una quantità complessa in quanto derivata dalle trasformate di Fourier. In questa descrizione è utile introdurre un'altra nuova grandezza, l'indice di rifrazione del materiale, dipendente da ω , definito come:

$$n = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$$

2.4 Derivazione analitica dell'equazione

A questo punto, introdotte le grandezze e il formalismo necessari, si vuole ricavare una forma analitica dell'equazione che descrive la propagazione di un'onda elettromagnetica in un dielettrico a risposta lineare in assenza di sorgenti. Riprendendo le equazioni 2.1 e 2.2, derivando la prima ed esprimendo $\tilde{D}_x(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \tilde{E}_x(\omega)$ si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_x &= i\omega \frac{\partial}{\partial t} \tilde{B}_y \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_x &= i\omega (i\omega \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \tilde{E}_x(\omega)) = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \tilde{E}_x \end{aligned}$$

Si identifica l'equazione di Helmholtz come la seguente:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_x(\omega) = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \tilde{E}_x(\omega) \quad (2.3)$$

2.5 Sviluppo dell'equazione di Helmholtz nel caso di onde quasi monocromatiche

Notiamo che l'equazione di Helmholtz è il corrispettivo dell'equazione delle onde nel dominio della frequenza; inoltre è possibile introdurre il vettore d'onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{T\omega}{\lambda} = \frac{n(\omega)\omega}{c} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r(\omega)}}{c}$$

al fine di riportare l'equazione in una forma più compatta:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_x(\omega) + k^2(\omega) \tilde{E}_x(\omega) = 0 \quad (2.4)$$

2.5 Sviluppo dell'equazione di Helmholtz nel caso di onde quasi monocromatiche

Al fine di descrivere la propagazione di impulsi di luce corti, con una banda spettrale finita, si abbandona adesso la descrizione del campo come onda piana monocromatica e ci si interessa alla risoluzione dell'equazione di Helmholtz in una situazione fisicamente realizzabile, ovvero quella di onda quasi monocromatica. Si considera quindi un campo elettrico quasi monocromatico propagante nella direzione z scrivibile analiticamente come:

$$E(z, t) = F(z, t)e^{-i\omega_0 t} \quad (2.5)$$

dove l'argomento dell'esponenziale nella parte destra dell'equazione è un termine di fase, il quale rappresenta un contributo oscillante attorno alla frequenza ω_0 , mentre $F(z, t)$ è un involuppo complesso.

Si può osservare facilmente come ω_0 sia la frequenza portante dello spettro ricavando l'espressione del campo elettrico nel dominio delle frequenze, per il quale è riportato di seguito il passaggio esplicito:

$$\tilde{E}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z, t)e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(z, t)e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \tilde{F}(z, \omega - \omega_0)$$

Dunque si osserva che lo spettro ha una forma funzionale definita dalla trasformata dell'involuppo, la quale è centrata in $\omega = \omega_0$.

A questo punto concentrandosi sulla forma della equazione 2.4 si osserva che è facilmente fattorizzabile in due termini, infatti la si può esprimere come:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + ik(\omega)\right]\left[\frac{\partial}{\partial z} - ik(\omega)\right]\tilde{E}(\omega) = 0$$

Si considera quindi la soluzione avanzante, per la quale dunque vale l'equazione

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} - ik(\omega)\right]\tilde{E}(\omega) = 0$$

Considerando quindi un ansatz a soluzione quasi monocromatica e con vettore d'onda reale (non esatto in generale), esprimendolo come:

$$\tilde{E}_x(z, \omega) = \tilde{F}(z, \omega - \omega_0) = \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)e^{ik(\omega_0)z} \quad (2.6)$$

Si osserva che è stato espresso k come $k(\omega_0)$ per evidenziare la quasi monocromaticità dello spettro piccato intono alla frequenza ω_0 (formula 2.5). A questo punto

2.5 Sviluppo dell'equazione di Helmholtz nel caso di onde quasi monocromatiche

sfruttando l'ansatz nell'equazione si ricavano le equazioni che governano la forma dell'involuppo ($A(z, \omega - \omega_0)$).

$$ik(\omega_0)e^{ik(\omega_0)z}\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) + e^{ik(\omega_0)z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)\right) = ik(\omega)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)e^{ik(\omega_0)z}$$

Osservando dunque che è possibile semplificare gli esponenziali si arriva alla seguente relazione:

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = i[k(\omega) - k(\omega_0)]\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \quad (2.7)$$

Si è arrivati ora ad un punto cruciale della trattazione del modello, in quanto le considerazioni fatte fino a ad ora (in particolare quella di assumere l'impulso come quasi monocromatico) permettono di sviluppare il vettore d'onda attorno alla frequenza ω_0 secondo la relazione:

$$k(\omega) \simeq k(\omega_0) + \frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega}\Big|_{\omega_0}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k(\omega)}{\partial \omega^2}\Big|_{\omega_0}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 k(\omega)}{\partial \omega^3}\Big|_{\omega_0}(\omega - \omega_0)^3 + \dots$$

Inserendo dunque questa espansione arrestata al terzo ordine in serie nell'equazione 2.7 e rinominando la derivata i -esima del numero d'onda come k_i si ricava una forma analiticamente semplice per l'equazione dell'involuppo nel dominio delle frequenze:

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = i[k_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}k_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}k_3(\omega - \omega_0)^3]\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \quad (2.8)$$

Inoltre si ricava facilmente, attraverso le proprietà delle trasformate di Fourier, la forma dell'equazione dell'involuppo nel dominio del tempo.

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -k_1\frac{\partial A(z, t)}{\partial t} - \frac{i}{2}k_2\frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} + \frac{k_3}{6}\frac{\partial^3 A(z, t)}{\partial t^3} \quad (2.9)$$

La trattazione finora discussa non tiene conto di eventuali processi di assorbimento della materia, ovvero la radiazione si propaga senza subire attenuazione all'interno del materiale attraversato. Tuttavia per completare la descrizione si ricorda che in generale k non è reale, e che quindi è necessario includere il suo carattere immaginario all'interno delle equazioni dell'involuppo; questa parte immaginaria gioca un ruolo fondamentale all'interno della descrizione della propagazione in quanto è responsabile dell'attenuazione del campo propagante, dovuta ai fenomeni di assorbimento, durante la propagazione stessa. Per il modello riportato ci si interessa al caso in cui

$$Im[k(\omega)] = \frac{\alpha}{2}$$

dove α è il coefficiente di attenuazione, un coefficiente reale, dipendente dal mezzo della propagazione che in questo caso è assunto costante, ovvero non dipendente dalla frequenza. È possibile dunque riscrivere le equazioni 2.8 e 2.9 includendo però il termine di assorbimento (di attenuazione).

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = i[k_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}k_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}k_3(\omega - \omega_0)^3 + i\frac{\alpha}{2}]\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -k_1\frac{\partial A(z, t)}{\partial t} - \frac{i}{2}k_2\frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} + \frac{k_3}{6}\frac{\partial^3 A(z, t)}{\partial t^3} - \frac{\alpha}{2}A(z, t) \quad (2.11)$$

Queste sono le equazioni di propagazione delle onde, rispettivamente nel dominio spettrale e temporale in presenza di assorbimento.

Capitolo 3

Propagazione degli impulsi e primo ordine perturbativo

In questo capitolo è riportata la descrizione dei comportamenti caratteristici dell'impulso propagante nel mezzo dielettrico in presenza di dispersione lineare. Per comprendere la fisica dei fenomeni che verranno esposti verranno prima introdotte le definizioni di velocità di gruppo e velocità di fase.

3.1 Velocità di fase e velocità di gruppo

La velocità di fase è definita come la velocità alla quale si propaga un fronte di fase dell'impulso propagante, mentre la velocità di gruppo è la velocità di propagazione dell'involucro. ([4])([3])

Per una descrizione più accurata si può prendere come esempio un'onda armonica:

$$\psi = A \sin(kx - t\omega + \epsilon) \quad (3.1)$$

dove ϵ è una fase generica implementata al fine di evitare che in $t = 0$ e $x = 0$ si abbia un'onda nulla. Si identifica la fase totale come $\phi = xk - t\omega + \epsilon$ ed ω e k come:

- $-\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t} |_x$ il rate di variazione della frequenza dell'armonica con il tempo
- $k = \frac{\partial \phi}{\partial x} |_t$ il rate di variazione della frequenza rispetto alla posizione

A questo punto si può facilmente identificare la velocità di propagazione di una fase costante come:

$$\frac{\partial x}{\partial t} |_{\phi} = \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial t}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v_{phase} \quad (3.2)$$

dove la velocità di fase è accompagnata dal segno positivo quando la fase si propaga nella direzione della coordinata crescente ed assume il segno negativo altrimenti. Inoltre velocità di fase sarà la velocità di propagazione della radiazione elettromagnetica in un determinato materiale, quindi può anche essere espressa come:

$$v_{phase} = \frac{c}{n(\omega)}$$

3.2 Dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza

A questo punto sviluppando analiticamente il termine k_1 si può osservare come questo corrisponda all'inverso della velocità di fase, infatti

$$k_1 = \frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega} = \frac{\partial \frac{n(\omega)\omega}{c}}{\partial \omega} = \frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{v_g}$$

Ci si può interrogare su quale sia l'origine della dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza. Per comprendere ciò che accade si considerano gli atomi di un materiale dielettrico ed un'onda elettromagnetica incidente su questi; gli atomi possono reagire in due modi dipendentemente dalla frequenza dell'onda (o dall'energia del fotone interagente). In generale si ha un fenomeno di scattering tra atomo e fotone, ma ciò non accade se la frequenza dell'onda identificante l'energia del fotone corrisponde al salto energetico tra due livelli energetici dell'atomo. Questa condizione porta quindi ad un fenomeno di assorbimento che permette un salto quantico ad un livello energetico maggiore da parte dell'atomo. Facendo innanzitutto riferimento al secondo caso, questa energia di eccitazione si concretizza in oscillazioni da parte degli atomi, quindi in energia termica, prima che il fotone venga riemesso. Differente a questo processo è ciò che accade nello scattering non risonante, il quale porta all'emissione di radiazioni attraverso un dipolo oscillante. Infatti si può pensare che l'incidenza dell'onda elettromagnetica induca una possibile nube elettronica ad oscillare, cosa che ovviamente non induce nessuna transizione energetica; a questo punto, con questa descrizione, è evidente come il sistema dell'atomo sia assimilabile a quello di un dipolo oscillante che presumibilmente irradia alla stessa frequenza con la quale oscilla. Quindi lo scattering risulta nella propagazione dei fotoni in una direzione dipendente dalla polarizzazione dell'onda incidente e con la stessa energia dei fotoni incidenti, in questo caso si parla di scattering elastico. Si può dunque pensare come la dipendenza di $n(\omega)$ di un certo materiale dalla frequenza dipenda dai salti dei livelli energetici degli atomi che lo compongono, e che quindi per trovarsi in una situazione di non dipendenza dalla frequenza è necessario lavorare a frequenze lontane da quelle di risonanza. ([4])

È interessante ricordare quello che è un modo empirico per ricavare la velocità di fase, in quanto è possibile sfruttare l'equazione di Sellmeier per ricavare il comportamento di $n(\omega)$. Il modello è descritto dalla seguente relazione:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{i=1}^M \frac{B_i \omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (3.3)$$

dove M è il numero di risonanze dei sistemi di oscillatori armonici caratteristici del materiale, ω_i sono le frequenze di risonanza degli oscillatori e i B_i sono coefficienti caratteristici del materiale stimabili sperimentalmente.

3.3 Soluzione al primo ordine perturbativo per un impulso gaussiano

Al fine di analizzare l'effetto della dispersione al primo ordine, in questa sezione è valutata analiticamente la propagazione di un impulso gaussiano. Per proseguire la descrizione del modello, e dunque per studiare la fenomenologia dovuta a k_1 sulla propagazione dell'impulso, è possibile isolare il suo effetto ponendo per il momento

k_2 e k_3 pari a zero. Con questa considerazione la 2.11 è riscrivibile in una versione semplificata:

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -k_1 \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} - \frac{\alpha}{2} A(z, t) \quad (3.4)$$

Osservando la struttura dell'equazione differenziale appena riportata si nota facilmente come il termine di assorbimento (lineare in $A(z, t)$) porti alla soluzione un contributo esponenziale governato dal coefficiente di attenuazione. A seguito di quest' ultima considerazione si cerca una soluzione nella forma seguente:

$$A(z, t) = \sqrt{I_0} a(z, t) e^{-\frac{\alpha z}{2}} \quad (3.5)$$

dove è stato semplicemente esplicitato il contributo di assorbimento e normalizzato all'intensità per pura comodità di analisi. L'aver esplicitato il contributo di assorbimento permette di ricavare per $a(z, t)$ un'equazione corrispondente ad un'equazione di propagazione in un mezzo senza perdite; ciò infatti è facilmente osservabile andando a sostituire la forma di $A(z, t)$ espressa nella formula 3.5 all'interno dell'equazione 3.4. Sono riportati di seguito i calcoli espliciti.

$$\begin{aligned} \sqrt{I_0} \frac{\partial a(z, t)}{\partial z} e^{-\frac{\alpha z}{2}} - \frac{\alpha}{2} \sqrt{I_0} a(z, t) e^{-\frac{\alpha z}{2}} + k_1 \sqrt{I_0} \frac{\partial a(z, t)}{\partial t} e^{-\frac{\alpha z}{2}} + \frac{\alpha}{2} \sqrt{I_0} a(z, t) e^{-\frac{\alpha z}{2}} = 0 \\ \frac{\partial a(z, t)}{\partial z} = -k_1 \frac{\partial a(z, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.6)$$

La quale può ulteriormente essere espressa nel dominio delle frequenze come:

$$\frac{\partial \tilde{a}(z, \omega)}{\partial z} = ik_1 \omega \tilde{a}(z, \omega) \quad (3.7)$$

dove la soluzione ha la seguente forma

$$\tilde{a}(z, \omega) = \tilde{a}(z=0, \omega) e^{ik_1 z \omega} \quad (3.8)$$

Dunque è possibile affermare che $a(z, t)$ dell'involuppo complesso, nel caso di perturbazione al primo ordine, evolve seguendo un'equazione di Helmholtz in assenza di termini di assorbimento.

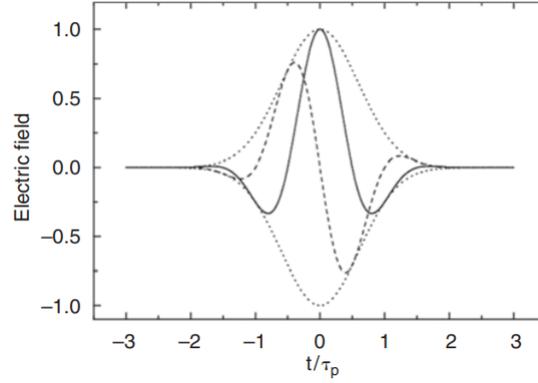


Figura 3.1. Nell'immagine è riportato come diversi impulsi possono avere lo stesso involuppo complesso, in questo caso gaussiano. Immagine tratta dal testo 'Ultrashort Laser Pulse Phenomena' di Diels ([2])

L'immagine 3.1 riporta la forma di un impulso gaussiano. Un impulso di questo genere è tale che al di fuori dal dielettrico l'involuppo possiede la seguente forma temporale:

$$a(z = 0, t) = e^{-\frac{t^2}{2t_0^2}} \quad (3.9)$$

Il procedimento che si segue è quello di evolvere la trasformata di Fourier del profilo considerato e quindi di procedere all'antitrasformata per ricavare la forma del profilo modificato dalla propagazione nel dielettrico. Procedendo dunque con la trasformata si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(z = 0, w) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(z = 0, t) e^{iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2t_0^2}} e^{iwt} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2 - 2iwt t_0^2}{2t_0^2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t - iwt_0^2)^2 + w^2 t_0^4}{2t_0^2}} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t - iwt_0^2)^2}{2t_0^2}} e^{-\frac{w^2 t_0^4}{2}} dt = e^{-\frac{w^2 t_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t - iwt_0^2)^2}{2t_0^2}} dt = \sqrt{2\pi t_0^2} e^{-\frac{w^2 t_0^2}{2}} \end{aligned}$$

Come ci si aspetta, la trasformata di un profilo gaussiano è anch'essa una gaussiana ma con varianza pari al reciproco di quella della gaussiana di partenza.

$$\tilde{a}(z = 0, w) = \sqrt{2\pi t_0^2} e^{-\frac{w^2 t_0^2}{2}} \quad (3.10)$$

A questo punto la propagazione dell'impulso nel dominio spettrale è ottenuta facilmente integrando l'equazione 3.7 secondo la relazione:

$$\tilde{a}(z, w) = \tilde{a}(z = 0, w) e^{i w k_1 z} = \sqrt{2\pi t_0^2} e^{-\frac{w^2 t_0^2}{2}} e^{i w k_1 z} \quad (3.11)$$

È ora possibile antitrasformare $\tilde{a}(z, w)$ e osservare la forma dell'impulso propagato nel dominio del tempo. Sono riportati di seguito i procedimenti analitici.

$$a(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \tilde{a}(z, w) e^{-iwt} = \sqrt{\frac{t_0^2}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-\frac{w^2 t_0^2}{2}} e^{i w k_1 z} e^{-iwt} =$$

$$a(z, t) = e^{-\frac{(t-k_1 z)^2}{2t_0^2}} \quad (3.12)$$

Quindi si osserva che l'involuppo propagato presenta lo stesso profilo della gaussiana in $z = 0$ (prima di propagarsi nel dielettrico) ma traslata spazialmente nel punto $z = v_g t$ attraverso la velocità $v_g = k_1^{-1}$, e quindi in funzione della velocità di gruppo. È possibile interpretare dunque il risultato ottenuto affermando che la velocità di gruppo è la velocità di propagazione dell'impulso. ([1])

Ricavata adesso la forma di $a(z, t)$ è possibile risalire alla forma del campo elettrico.

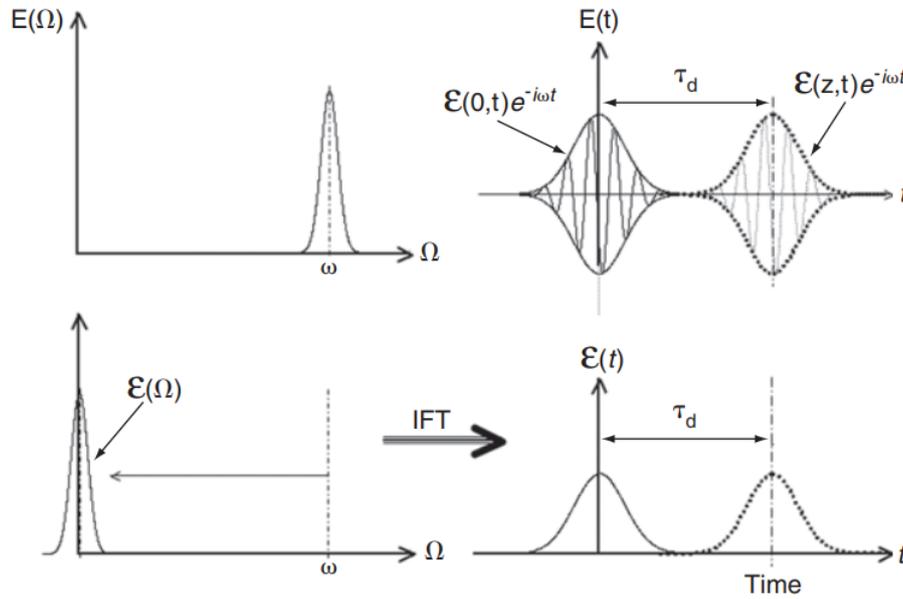


Figura 3.2. In alto a sinistra è riportata la trasformata di Fourier dell'involuppo dell'impulso, ed in alto a destra il corrispondente nel dominio nel tempo. Nella parte inferiore sono riportate in maniera analoga l'intensità del campo nei due diversi domini. Immagine tratta dal testo 'Ultrashort Laser Pulse Phenomena' di Diels ([2])

In questo caso il calcolo è particolarmente facile. Si ricostruiscono quindi $A(z, t)$ e $F(z, t)$ ricordando le relazioni 2.5 e 2.6.

$$A(z, t) = \sqrt{I_0} a(z, t) e^{-\frac{z\alpha}{2}} = \sqrt{I_0} e^{-\frac{(t-k_1 z)^2}{2t_0^2}} e^{-\frac{z\alpha}{2}}$$

$$F(z, t) = \sqrt{I_0} e^{-\frac{(t-k_1 z)^2}{2t_0^2}} e^{-\frac{z\alpha}{2}} e^{iK_1(\omega_0)z}$$

A questo punto si ricava la forma del campo propagante:

$$E_x(z, t) = \sqrt{I_0} e^{-\frac{(t-k_1 z)^2}{2t_0^2}} e^{-\frac{z\alpha}{2}} e^{iK_1(\omega_0)z} e^{-i\omega_0 t} \quad (3.13)$$

Capitolo 4

Secondo e terzo ordine perturbativo con Group Velocity Dispersion

All'interno di questo capitolo sono discussi gli effetti del secondo e del terzo ordine dello sviluppo del numero d'onda dell'impulso.

Per identificare al meglio gli effetti delle diverse k_i durante la propagazione, è analizzato prima il caso con k_3 posto uguale a zero. La perturbazione al secondo ordine rappresenta quella che analiticamente è la dipendenza della velocità di gruppo dalla frequenza, quest'ultima si manifesta fisicamente sotto ciò che assume il nome di group velocity dispersion (GVD).

4.1 Cambio di coordinate ed equazione per l'involuppo

Si ricorda che tipicamente vengono distinti due tipi di dispersione identificati dal segno di k_2 : viene definita 'dispersione normale' il caso con segno positivo ($\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{v_g} > 0$) e come 'dispersione anomala' il caso con segno negativo ($\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{v_g} < 0$). Questa considerazione verrà ripresa in seguito dove verrà analizzato l'effetto della GVD in entrambi i regimi di dispersione. Per studiare la dispersione della velocità di gruppo a livello analitico si riporta una procedura analoga a quella sfruttata per la perturbazione al primo ordine; per prima cosa si ricorre alla 2.11 e, come nel caso precedente, si sceglie una soluzione della forma $A(z, t) = \sqrt{I_0} a(z, t) e^{\frac{\alpha z}{2}}$ al fine di isolare il termine di assorbimento. Si trova dunque un'equazione differenziale per $a(z, t)$ della seguente forma:

$$\frac{\partial a(z, t)}{\partial z} = -k_1 \frac{\partial a(z, t)}{\partial t} - \frac{i}{2} k_2 \frac{\partial^2 a(z, t)}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

Si osserva che si ha la possibilità di introdurre un cambio di variabili, infatti si può sfruttare un riferimento solidale con l'impulso propagante a velocità k_1^{-1} .

$$T = t - z k_1; Z = z$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial Z} - k_1 \frac{\partial}{\partial T} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \end{aligned}$$

Nel nuovo sistema di riferimento la relazione 4.1 può quindi essere espressa come:

$$\frac{\partial a(z, t)}{\partial Z} = -\frac{i}{2}k_2 \frac{\partial^2 a(z, t)}{\partial T^2} \quad (4.2)$$

Per gli sviluppi analitici successivi è utile riportare l'equazione appena trovata anche nel dominio delle frequenze.

$$\frac{\partial \tilde{a}(z, \Omega)}{\partial Z} = \frac{i}{2}k_2 \Omega^2 a(z, \Omega) \quad (4.3)$$

dove, per evitare ambiguità e per evidenziare il cambio di variabili, è stato utilizzato il simbolo Ω per identificare la frequenza.

La 4.3 è facilmente risolvibile e la soluzione ha la forma

$$\tilde{a}(Z, \Omega) = \tilde{a}(0, \Omega) e^{\frac{i}{2}k_2 \Omega^2 Z} \quad (4.4)$$

Dove si ricorda che $\tilde{a}(0, \Omega)$ è la condizione al contorno, ovvero la condizione iniziale che identifica la forma dell'impulso all'ingresso del mezzo dielettrico.

4.2 Dispersione della velocità di gruppo per un impulso gaussiano

Per studiare l'effetto della GVD su un impulso si considera un caso analiticamente semplice già sfruttato in precedenza, ovvero l'impulso gaussiano. Dunque si considera un involuppo iniziale nel dominio del tempo della seguente forma.

$$a(Z = 0, T) = e^{-\frac{T^2}{2T_0^2}}$$

Seguendo procedimenti analoghi a quelli fatti per la perturbazione al primo ordine si ricava la trasformata di Fourier.

$$\tilde{a}(Z = 0, \Omega) = \sqrt{2\pi T_0^2} e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2}}$$

Si osserva come l'involuppo in $z = 0$ nello spazio delle frequenze sia una gaussiana con larghezza pari a $\frac{1}{T_0}$. Questo carattere si manifesta con il fatto che il prodotto delle dispersioni delle due gaussiane nei due differenti domini è fissato, ciò sta ad implicare che per una data larghezza spettrale dell'impulso propagante la sua durata temporale presenta un limite fisico di riducibilità sotto il quale non è possibile manifestare l'impulso stesso. Dalla forma di $\tilde{a}(0, \Omega)$ si osserva che $\Delta\Omega\Delta T = 1$, questa condizione identifica il caso di un impulso detto 'trasform limited' o 'bandwidth limited'. Dunque facendo riferimento alla 4.4 la forma dell'impulso propagato nel dominio delle frequenze è:

$$\tilde{a}(Z, \Omega) = \sqrt{2\pi T_0^2} e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2}} e^{\frac{i}{2}k_2 \Omega^2 Z} \quad (4.5)$$

È fondamentale osservare attraverso la 4.5 una delle principali caratteristiche della dispersione della velocità di gruppo, ovvero di come questa non influenzi in alcun modo lo spettro di potenza dell'impulso in quanto quest'ultimo è proporzionale al

quadrato dell'involuppo nel dominio delle frequenze. Infatti:

$$\begin{aligned} P(Z, \Omega) &\propto |\tilde{a}(Z, \Omega)|^2 = \left| \sqrt{2\pi T_0^2} e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2}} e^{\frac{i}{2} k_2 \Omega^2 Z} \right|^2 = \\ &= \left(\sqrt{2\pi T_0^2} e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2}} e^{\frac{i}{2} k_2 \Omega^2 Z} \right) \left(\sqrt{2\pi T_0^2} e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2}} e^{-\frac{i}{2} k_2 \Omega^2 Z} \right) = \left| \sqrt{2\pi T_0^2} e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2}} \right|^2 = |\tilde{a}(0, \Omega)|^2 \end{aligned}$$

Dunque in seguito alla propagazione in presenza di soli effetti dispersivi lo spettro dell'impulso rimane invariato.

Come fatto nel caso precedente, si sfrutta l'antitrasformata per ricavare $a(Z, T)$. Sono riportati di seguito i passaggi analitici.

$$\begin{aligned} a(Z, T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}(Z, \Omega) e^{-iT\Omega} d\Omega = \sqrt{\frac{T_0^2}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(T_0^2 \Omega^2 - ik_2 \Omega^2 Z - 2iT\Omega)} d\Omega = \\ &= \sqrt{\frac{T_0^2}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(T'^2 \Omega^2 - 2iT\Omega)} d\Omega = \sqrt{\frac{T_0^2}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(T'\Omega - \frac{iT}{T'})^2} e^{-\frac{T^2}{2T'}} d\Omega = \\ &= \sqrt{\frac{T_0^2}{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{T'} e^{-\frac{T^2}{2T'}} \end{aligned}$$

Quindi è stata ottenuta la seguente forma dell'involuppo nel dominio del tempo:

$$a(Z, T) = \frac{T_0}{\sqrt{T_0 - iZk_2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{T^2}{T_0 - iZk_2}} = \frac{T_0}{\sqrt{T'}} e^{-\frac{1}{2} \frac{T^2}{T'}} \quad (4.6)$$

Dalla formula appena ricavata si osserva la differenza rispetto al caso della perturbazione al primo ordine; infatti lo sviluppo al secondo ordine porta ad una variazione della larghezza della gaussiana durante la propagazione, in particolare variano larghezza ed ampiezza dell'impulso. La larghezza durante la propagazione è una quantità complessa dipendente da z :

$$T'(Z) = T_0 \sqrt{1 - \frac{iZk_2}{T_0^2}} \quad (4.7)$$

Per continuare l'analisi dell'effetto della perturbazione al secondo ordine è conveniente dal punto di vista analitico riscrivere l'involuppo ricavato dall'antitrasformata come un modulo ed una fase. Quindi per riscrivere l'involuppo nella forma $a(Z, T) = Y(Z, T)e^{i\phi}$ si divide l'esponente della 4.6 in parte reale e parte immaginaria.

$$\frac{T^2}{2(T_0^2 - iZk_2)} = \frac{T^2}{2(T_0^2 - iZk_2)} \frac{(T_0^2 + iZk_2)}{(T_0^2 + iZk_2)} = \frac{T^2}{2T_0^2(1 + \frac{Z^2 k_2^2}{T_0^4})} + i \frac{Zk_2 T^2}{2T_0^4(1 + \frac{Z^2 k_2^2}{T_0^4})}$$

che può essere ulteriormente semplificato secondo la relazione:

$$\frac{T^2}{2(T_0^2 - iZk_2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{T^2}{2T_D^2} + i \frac{Zk_2 T^2}{2T_0^2 T_D^2} \right)$$

dove è stata introdotta la grandezza

$$T_D^2(Z) = T_0^2 \left(1 + \frac{Z^2 k_2^2}{T_0^4} \right)$$

Inoltre introducendo $L_D = \frac{T_0^2}{k_2}$ si trova:

$$T_D(Z) = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{Z}{L_D}\right)^2} \quad (4.8)$$

La quantità L_D appena introdotta è una grandezza importante sia dal punto di vista analitico che dal punto di vista sperimentale in quanto rappresenta la ‘lunghezza di dispersione’, ovvero la coordinata spaziale alla quale l’inviluppo, e quindi l’impulso propagante, ha aumentato la sua larghezza di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto alla larghezza in $z=0$. Quindi supponendo sia possibile misurare l’ampiezza di due impulsi con k_2 differenti propagati allo stesso istante all’interno di un dielettrico, quello con la lunghezza di dispersione maggiore subirà un minor incremento della sua larghezza poiché risentirà più debolmente della dispersione della velocità di gruppo. Riscrivendo quindi l’inviluppo attraverso modulo e fase si ricava:

$$a(Z, T) = \frac{T_0^2}{T^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{T^2}{T_D^2}} e^{i \frac{Z k_2 T^2}{2 T_0^2 T_D^2}} = \frac{T_0^2}{T^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{T^2}{T_D^2}} e^{i\phi} \quad (4.9)$$

È interessante osservare una caratteristica della 4.9, ovvero che l’impulso propagato è un impulso così detto ‘chirpato’ (chirped), ovvero che presenta una modulazione di fase; e che assieme all’introduzione del fenomeno di chirping si è perso anche il carattere trasform limited dell’impulso in quanto T_D differisce da T_0 per un fattore moltiplicativo. Sono riportate due immagini esplicative del comportamento dell’intensità e della ‘frequenza di chirp’ ($\frac{\partial \phi}{\partial T}$), ed in particolare la loro dipendenza dal tempo e come variano rispetto al parametro $\frac{Z}{L_D}$

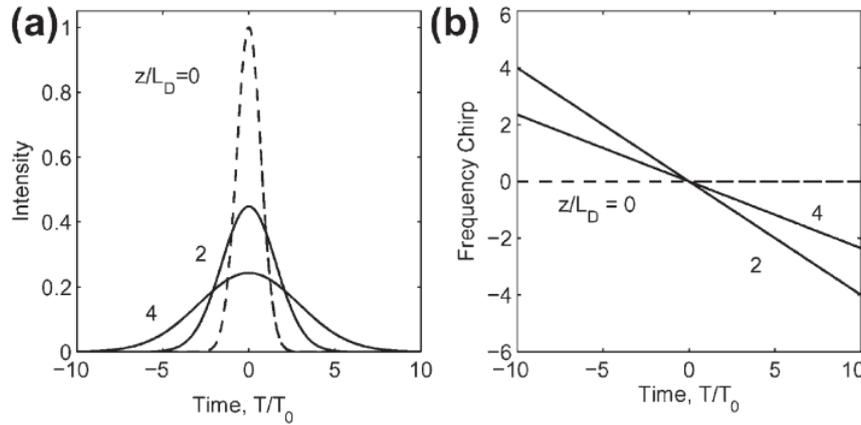


Figura 4.1. Comportamenti dell’intensità e della frequenza di chirp nel tempo al variare di z/L_D . Immagine tratta dal testo ‘Non Linear Fiber Optics’ di Agrawal ([1])

Arrivati ad una formula esplicita dell'involuppo propagato si vuole trattare il chirping dovuto alla fase ϕ , a tal fine, risulta opportuno introdurre la così detta frequenza istantanea ω_{ist} :

$$\omega_{ist} = \omega_0 - \frac{\partial \phi}{\partial T} \quad (4.10)$$

Essendo ϕ una fase adimensionale la sua derivata nel tempo ha le dimensioni di una frequenza. Si trova dunque:

$$\delta w = w_{ist} - w_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial T} = \frac{ZTk_2}{T_0^4 + Z^2k_2^2} = \frac{sgn(k_2) \frac{z}{L_D} T}{i + (\frac{z}{L_D})^2 T_0^2} \quad (4.11)$$

Il chirp descrive quindi come le frequenze siano modulate nel tempo, ovvero come la frequenza vari linearmente attraverso l'impulso.([1])

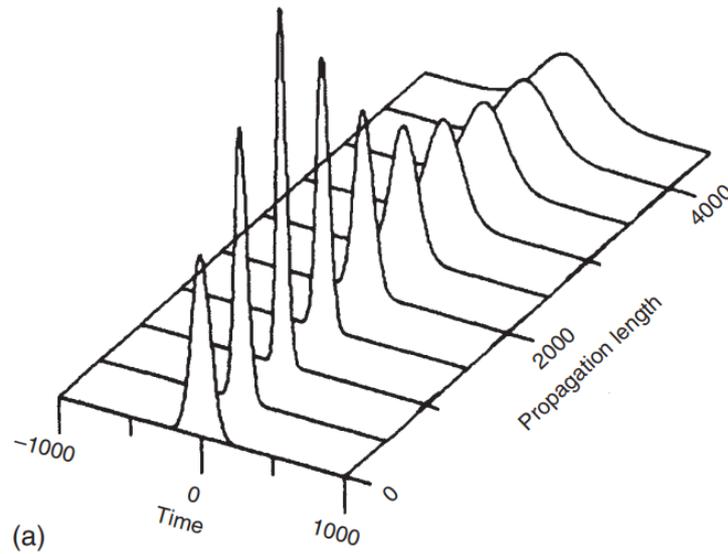


Figura 4.2. Comportamento di un impulso ultracorto gaussiano in presenza di prechirp. L'asse temporale è riportato in scala di femtosecondi mentre la scala spaziale è in nanometri. Immagine tratta dal libro 'Ultrashort Laser Pulse Phenomena' di Diels ([2])

4.3 Descrizione della Group Velocity Dispersion

Adesso si può capire dal punto di vista fisico perché la larghezza dell'impulso varia durante la propagazione, infatti la 4.11 si può interpretare come il fatto che le frequenze non vengono propagate tutte alla stessa velocità. Le frequenze che si propagano più velocemente tendono a situarsi sempre di più verso il Trailing Edge, mentre quelle che si propagano più lentamente sempre di più verso il Leading Edge; ed è questo il significato della dispersione della velocità di gruppo, ovvero che frequenze diverse propagandosi a velocità diverse portano modifiche all'ampiezza e all'intensità dell'impulso durante la propagazione.

È possibile ancora fare un'ultima considerazione, osservando la 4.9 e ricordando la forma di T_D (4.8) si nota facilmente come, nel caso di un impulso di partenza transform limited, la larghezza dell'impulso non dipenda dal segno di k_2 , quindi dal tipo

di dispersione, a causa della sua dipendenza quadratica da k_2 ; la fase ϕ a differenza della larghezza dipende linearmente da k_2 . Se si riprende la figura 4.2(b) il segno di k_2 si manifesta come rotazione oraria o antioraria della retta del chirp al variare del parametro $\frac{Z}{L_D}$. Dalla forma del chirp (δw) si evince facilmente che nel caso di dispersione normale, quindi con $k_2 > 0$, le frequenze più basse tenderanno a trovarsi nel Leading Edge e dunque verranno propagate più velocemente mentre quelle più alte si propagheranno più lentamente. Il caso della dispersione anomala manifesta esattamente la fenomenologia inversa rispetto a quella della dispersione normale (frequenze più alte nel Leading Edge), ed infatti questa particolare simmetria è coerente, come ci si aspetta, col fatto che la variazione della larghezza dell'impulso all'interno del dielettrico non sia dipendente dal tipo di dispersione.

Per l'analisi riportata è stato utilizzato il formalismo della trasformata di Fourier, e si è visto come questa porti alla descrizione spaziale o temporale delle componenti spettrali attraverso termine di fase degli impulsi propagati. Una forma differente può essere data attraverso l'introduzione di una descrizione bidimensionale (tempo–frequenza angolare), ovvero quella della distribuzione di Wiegner.

La distribuzione di Wigner di una funzione $E(t)$ è esprimibile come:

$$W_E(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(t + \frac{s}{2}) \tilde{E}^*(t - \frac{s}{2}) e^{-is\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\Omega + \frac{s}{2}) \tilde{E}^*(\Omega - \frac{s}{2}) e^{its} \quad (4.12)$$

dove t ed Ω sono variabili coniugate come nella descrizione delle trasformate di Fourier. Si osserva inoltre che la distribuzione di Wiegner da una rappresentazione locale dello spettro del segnale, infatti si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_E(t, \Omega) dt = |\tilde{E}(\Omega)|^2 \quad (4.13)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_E(t, \Omega) d\Omega = 2\pi |\tilde{E}(t)|^2 \quad (4.14)$$

Questa descrizione evidenzia, attraverso la sua bidimensionalità, gli effetti di dispersione dell'impulso propagante. Per concludere la trattazione della dispersione al secondo ordine, in figura 4.3 è riportato il comportamento delle frequenze di un impulso gaussiano, in funzione del tempo, nelle condizioni di impulso chirpato e non chirpato. ([2])

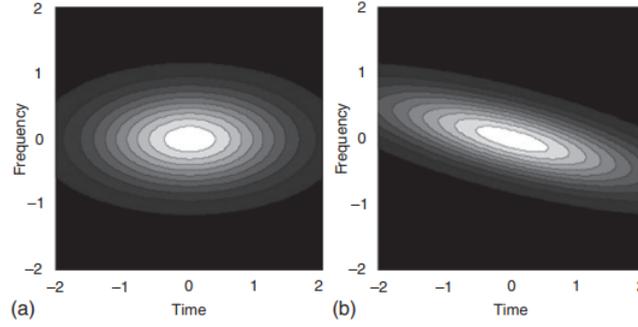


Figura 4.3. Distribuzione di Wigner per un impulso gaussiano. L'immagine a sinistra rappresenta il caso di un fascio non chirpato e quindi con una fase costante. L'immagine di destra rappresenta la modulazione della frequenza a seguito del chirp dovuto ad una fase quadratica nel tempo. Immagine tratta dal testo 'Ultrashort Laser Pulse Phenomena' di Diels ([2])

4.4 Terzo ordine perturbativo e TOD

L'allargamento dell'impulso propagante, sin qui descritto è quello relativo all'ordine più basso della dispersione (GVD), ovvero ai fenomeni che derivano dal termine in k_2 nell'equazione 2.9 di propagazione delle onde. Spesso per una descrizione più accurata è necessario introdurre la dispersione al terzo ordine (TOD), ovvero quella relativa al termine k_3 dello sviluppo del numero d'onda. Chiaramente si ha la necessità di introdurre l'analisi della TOD quando il parametro di espansione $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ è troppo grande per troncare lo sviluppo di $k(\omega)$ al secondo ordine.

Si vuole riportare a questo punto da descrizione della fenomenologia indotta contemporaneamente dai termini k_2 e k_3 ; per fare questo si procede come già fatto riferendosi alla 2.11 includendo questa volta anche il terzo ordine e sfruttando ovviamente lo stesso cambio di variabili utilizzato per la dispersione al secondo ordine:

$$\frac{\partial a(Z, T)}{\partial Z} = -\frac{i}{2}k_2 \frac{\partial^2 a(Z, T)}{\partial T^2} + \frac{k_3}{6} \frac{\partial^3 a(Z, T)}{\partial T^3} \quad (4.15)$$

dove la 4.15 è riscrivibile nel dominio delle frequenze come:

$$\frac{\partial \tilde{a}(z, \Omega)}{\partial Z} = \frac{i}{2}k_2\Omega^2 \tilde{a}(z, \Omega) + \frac{i}{6}k_3\Omega^3 \tilde{a}(z, \Omega) = \frac{i}{2} \tilde{a}(Z, \Omega) (k_2\Omega^2 + \frac{k_3}{3}\Omega^3) \quad (4.16)$$

Prendendo $\tilde{a}(0, \Omega)$ come condizione iniziale, l'ultima equazione ha una soluzione della seguente forma:

$$\tilde{a}(Z, \Omega) = \tilde{a}(0, \Omega) e^{\frac{i}{2}(k_2\Omega^2 + \frac{k_3}{3}\Omega^3)Z} \quad (4.17)$$

Una soluzione analitica può essere ricavata nel caso di un impulso gaussiano, per estendere l'analisi questa volta si considera un impulso gaussiano chirpato, ovvero un'impulso gaussiano dotato di una fase complessa prima della propagazione. Questo stratagemma (*pre-chirping*) viene spesso utilizzato a livello sperimentale in quanto l'impulso in questo modo non è trasform limited prima della propagazione, ciò può essere sfruttato al fine di compensare la dispersione introdotta dal materiale attraversato.

L'involuppo complesso di impulso gaussiano pre-chirpato è esprimibile come:

$$a(Z=0, T) = e^{\frac{T^2}{2T_0^2}(1+iC)} \quad (4.18)$$

Quindi si trasforma $a(0, T)$ al fine di sfruttare la 4.17. I passaggi analitici sono del tutto analoghi a quella riportati per la dispersione al secondo ordine.

$$\tilde{a}(Z=0, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(Z=0, T) e^{iT\Omega} dT = \sqrt{\frac{2\pi T_0^2}{1+1C}} e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2(1+C^2)}(1-iC)}$$

Dunque si ottiene facilmente:

$$\tilde{a}(Z, \Omega) = \sqrt{2\pi T_0^2} e^{\frac{i}{2}(k_2\Omega^2 + \frac{k_3}{3}\Omega^3)Z} e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2(1+C^2)}(1-iC)} \quad (4.19)$$

A questo punto si ricava $a(Z, T)$ antitrasformando;

$$a(Z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}(Z, \Omega) e^{-iT\Omega} d\Omega = \sqrt{\frac{T_0^2}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{T_0^2\Omega^2}{1+iC} - ik_2\Omega^2 Z - i\frac{k_3}{3}\Omega^3 Z - 2iT\Omega\right)} d\Omega$$

Si definisce la seguente quantità al fine di semplificare la forma analitica della soluzione:

$$p^2 = \frac{T_0^2}{2} \left(\frac{1}{1+iC} - \frac{ik_2 Z}{T_0^2} \right) \quad (4.20)$$

Dunque $a(Z, T)$ può essere espressa come:

$$a(Z, T) = \frac{\sqrt{2\pi T_0}}{|b|^{\frac{1}{3}}} e^{\frac{2p-3bT}{3pb^2}} Ai\left(\frac{p-bT}{p|b|^{\frac{4}{3}}}\right) \quad (4.21)$$

Dove si ha $b = \frac{ZK_3}{2p^3}$ ed $Ai(x)$ è la funzione di Airy, la quale è definita come:

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt \quad (4.22)$$

Come ci si aspetta, la propagazione dipende dal valore relativo di k_3 e k_2 , essendo queste ultime di dimensionalità differenti è utile introdurre una lunghezza di dispersione anche per la TOD:

$$L'_D = \frac{T_0^3}{|k_3|} \quad (4.23)$$

Si può affermare, che la TOD da un contributo considerevole alla dispersione dell'impulso tanto più il rapporto $\frac{L'_D}{L_D}$ è minore di 1. ([1])

In figura 4.4, è mostrata la propagazione di un impulso gaussiano in presenza di effetti dovuti alla TOD per diversi valori di L'_D .

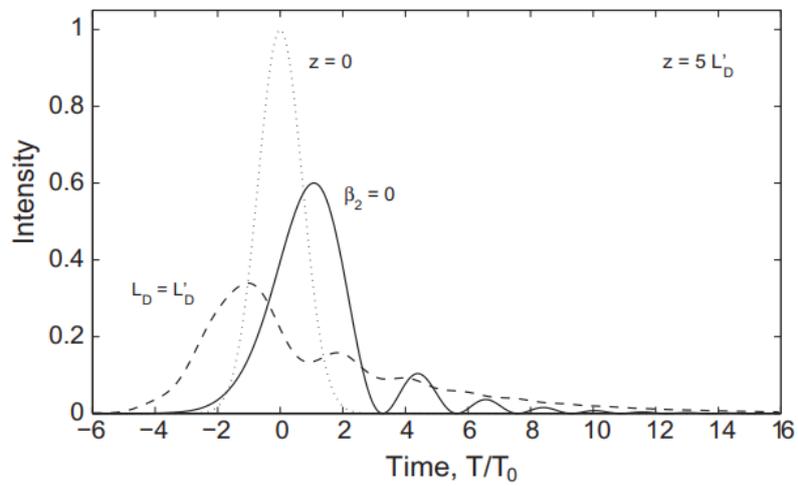


Figura 4.4. La figura riporta l'intensità a $Z = 5L'_D$ per un impulso gaussiano non prechirpato, la curva continua riporta il caso con $k_2 = 0$ e la curva tratteggiata il caso $L_D = L'_D$. In particolare si osservano dei ripple nella coda dell'impulso, carattere peculiare riconducibile alla funzione di Airy. Immagine tratta dal testo 'Non Linear Fiber Optics' di Agrawal([1])

Capitolo 5

Conclusioni

In questa dissertazione è stata discussa la propagazione di impulsi di luce ultracorti all'interno di materiali dispersivi. Nel secondo capitolo mediante l'applicazione dell'equazione di Helmholtz è stato possibile determinare l'equazione di propagazione delle onde, rispettivamente nel dominio temporale e delle frequenze in presenza di assorbimento. Nel terzo capitolo è stata riportata la descrizione dei comportamenti caratteristici dell'impulso propagante nel mezzo dielettrico in presenza di dispersione lineare. Nel capitolo 4 è stata sviluppata l'analisi degli effetti del secondo e terzo ordine perturbativo. Nei capitoli tre e quattro la trattazione analitica ha riguardato la propagazione di un impulso gaussiano attraverso l'applicazione delle trasformate di Fourier e relative proprietà. In conclusione, il primo risultato che è fondamentale evidenziare è che, come si è notato dai processi analitici riportati nei precedenti capitoli, gli sviluppi perturbativi fino al terzo ordine in approssimazione di risposta lineare del campo elettrico non risultano in modifiche allo spettro dell'impulso propagante. In compenso ciò che si evince da una analisi lineare è la modifica che subisce l'impulso alla sua forma temporale. Come è stato possibile osservare il fenomeno caratteristico deducibile a partire dagli sviluppi al secondo ordine è quello della group velocity dispersion (GVD), ovvero di come le differenti frequenze dello spettro dell'impulso vengano propagate nel materiale dielettrico con velocità differenti, effetto che si concretizza appunto in una modulazione della forma dell'impulso, spesso non trascurabile a livello sperimentale.

Ciò che è stato dedotto in questa dissertazione è ampiamente ripreso ed ulteriormente approfondito per lo studio delle metodologie di trasmissione dati, ad esempio in fibra ottica, dove la dispersione cromatica rappresenta qualcosa di assolutamente non trascurabile.

Esistono una serie di metodologie che fanno parte del così detto "dispersion management" dove si punta a minimizzare e gestire gli effetti di dispersione; la maggior parte di queste metodologie sfruttano fenomeni non lineari, come ad esempio lo wave mixing, attraverso i quali è possibile compensare del tutto o parzialmente i fenomeni di dispersione analizzati in questa dissertazione portando l'effetto medio della GVD a zero([1]).

Bibliografia

- [1] G. P. Agrawal, *Non Linear Fiber Optics*. AP, 2006.
- [2] J. C. Diels, *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*. AP, 2006.
- [3] G. R. Fowles, *Introduction to moder optics*. Dover Pubns, 1989.
- [4] E. Hecht, *Optic*. Addison-Wesley, 2001.