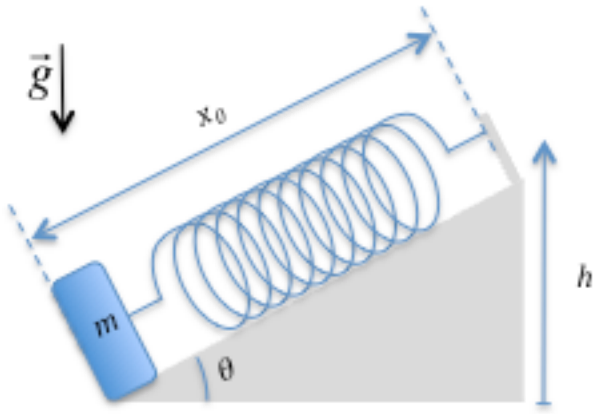
Esercizio n. 1

Il cubetto in figura di massa m può scivolare senza attrito lungo il piano inclinato di θ rispetto all'orizzontale. Il cubetto è collegato ad una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla (l'altro estremo della molla è fisso). Inizialmente il cubetto è fermo alla base del piano inclinato e l'estensione della molla è di x_0.



Calcolare per il successivo moto di salita:

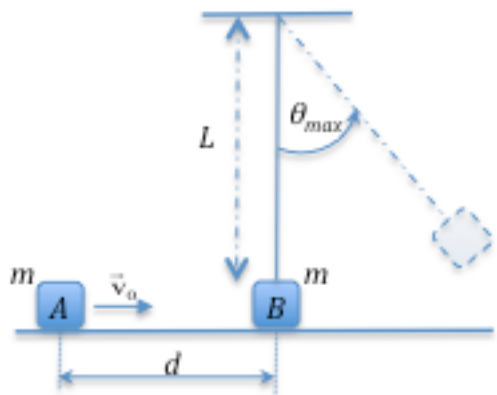
- la massima quota raggiunta
- la massima velocità raggiunta
- il tempo t_1 del primo passaggio alla quota h_1.

Valori numerici: m=0.50 kg ; θ = 25^0 ; k = 4.2 N/m ; x_0=80 cm ; h_1 = 4.0 cm

Esercizio n. 2

Come mostrato schematicamente in figura, il proiettile **A** di massa m è appoggiato su una superficie orizzontale scabra con coefficiente di attrito dinamico μ_d ed un bersaglio B, anch'esso di massa m, è collegato al soffitto tramite una fune inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza L. All'istante iniziale, $t=0$, si osserva che:

- la fune è verticale ed il corpo **B** è fermo,
- il corpo **A** si trova a distanza d dal corpo **B**,
- **A** si muove verso **B** con velocità $\vec{v}_0$



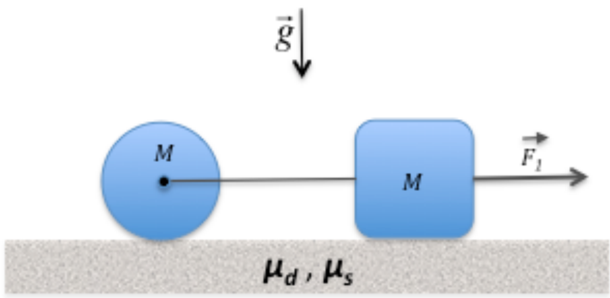
Si considerino i due corpi puntiformi e si trascuri ogni attrito fra fune e soffitto. All'istante $t_1 > 0$ il corpo A urta il corpo B e l'urto è tale che, **immediatamente dopo,** l'energia cinetica totale posseduta dal sistema dei due corpi è pari alla **metà** dell'energia cinetica posseduta dal corpo **A** immediatamente prima dell'urto.

1) Si dica quale tipo d'urto avviene fra i due corpi (*elastico, parzialmente anelastico o completamente anelastico*) e si determini la velocità di ognuno dei due corpi immediatamente dopo l'urto.
2) Considerando che, qualunque sia il tipo d'urto, i corpi rimangono separati e non formano un corpo unico, si dica qual'è l'angolo massimo θ_{max} a cui giunge il corpo B dopo l'urto.
3) Quanto tempo, t_2, dopo l'urto il corpo B raggiunge per la prima volta l'angolo massimo θ_{max}?
4) Si trovi il modulo della forza esercitata dalla fune sul soffitto negli istanti successivi all'urto in funzione dell'angolo fra la fune e la verticale. Si dica in quale punto il modulo della forza è massimo e se ne calcoli il valore numerico.

Valori numerici: m =0.50 kg ; μ_d= 0.50 ; L=2.0 m ; d = 1.3 m ; $\vec{v}_0$=4.0 $\hat{x}$ m/s

Esercizio n. 3

Consideriamo un cubo di massa M libero di muoversi su un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito dinamico μ_d). Tale cubo è connesso da un cavo, inestensibile e di massa trascurabile, ad un cilindro omogeneo di massa anch'essa pari a M: il cavo è orizzontale e connesso al cilindro in modo tale da applicare al suo asse una forza orizzontale (si veda figura).



a. Al cubo viene applicata una forza orizzontale F_1 come in figura. Sapendo che il cubo ed il cilindro si muovono con velocità costante e che il cilindro rotola senza strisciare, si calcoli μ_d.
b. Al cubo viene applicata una forza orizzontale $F_2 = 2\,F_1$; si calcoli l'accelerazione del cubo e la tensione della corda, assumendo che il cilindro rotoli senza strisciare e che la corda sia tesa.
c. Nelle condizioni indicate al punto (b), quale è il valore minimo possibile per il coefficiente di attrito statico μ_s tra piano e cilindro?

Valori numerici: M = 3.70 kg, F_1 = 10.9 N.

Meccanica: risolvere esercizi 1, 2, 3 in tre ore
Meccanica Classica: risolvere esercizio 1, 2, 3 in un'ora
Meccanica Sistemi Continui: risolvere esercizi 2, 3 in due ore

Es. n. 1: soluzione:

1. Alla minima estensione della molla x_m si ha, applicando la conservazione della energia meccanica: $\frac{1}{2} kx_0^2 = mg(x_0-x_m)\sin\theta + \frac{1}{2} kx_m^2$ che per $x_0 = 80$ cm da $x_m = 18{,}6$ cm e $\boldsymbol{h_m = 25{,}9}$ **cm** (l'ampiezza delle oscillazioni è $A = (x_0-x_m)/2 = 30.7$ cm).
2. $\mathbf{v}_{MAX}$ si ha quando si annulla la forza, cioè per $\boldsymbol{kx_C = mg\sin\theta}$ (x_c è pertanto il centro del moto armonico). In tali condizioni si ha: $\frac{1}{2} kx_0^2 = mg(x_0-x_C)\sin\theta + \frac{1}{2} kx_C^2 + \frac{1}{2} mv_{MAX}^2$ che permette di ricavare $\boldsymbol{v_{MAX} = 0.89}$ **m/s** (allo stesso risultato di può arrivare utilizzando la legge del moto armonico ricavando $v_{MAX} = A\omega = A(k/m)^{0.5} = 0.89$ m/s).
3. Con origine in x_C e asse x orientato verso l'alto l'equazione del moto è: $x(t) = A\sin(\omega t-\pi/2)$. Ponendo $x(t_1) = -(A-h_1/\sin\theta) = A\sin(\omega t_1-\pi/2)$, si ricava $\boldsymbol{t_1 = 0{,}28}$ **sec**.

Es. n. 2: soluzione:

1) Il corpo **A** scivola in presenza della forza di attrito la cui componente lungo l'asse x, preso positivo nel verso della velocità iniziale, è $F = -\mu mg$. L'accelerazione del corpo lungo x è, perciò costante ed ha componente $a = -\mu g$.

Dal teorema dell'energia cinetica applicato fra l'istante $t=0$ e quello dell'urto fra A e B si ricava $-\mu mgd = K_1 - K_0$ dove K_0 e K_1 sono rispettivamente l'energia cinetica del corpo A al tempo t=0 e subito prima dell'urto: $-\mu mgd = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$. Possiamo quindi ricavare la velocità con cui corpo A urta in corpo B $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} = 1.80$ ms^{-1}.

Durante l'urto si conserva la quantità di moto quindi il centro di massa, che prima dell'urto si muove con velocità $v_{cm} = \frac{mv_1}{2m} = \frac{v_1}{2}$=0.9 ms^{-1}, continuerà a muoversi con la stessa velocità: ciò significa che l'energia cinetica del centro di massa è, prima e dopo l'urto, pari a $K_{fin}^{cm} = \frac{1}{2}2mv_{cm}^2 = m\frac{v_1^2}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mv_1^2\right) = \frac{K_1}{2}$, cioè proprio pari alla metà dell'energia cinetica del corpo **B** prima dell'urto. Per il teorema di Koenig dell'energia cinetica possiamo quindi dedurre che i due corpi, dopo l'urto, hanno energia cinetica nulla nel S.R. del centro di massa: l'urto quindi è completamente anelastico. Ognuno dei due corpi si muove con la velocità del centro di massa.

2) Dopo l'urto l'energia meccanica del corpo **B**, vincolato al soffitto dalla corda e quindi non soggetto ad attrito, si conserva e θ_{max} viene raggiunto quando l'energia cinetica si annulla. Applicando la conservazione dell'energia si ricava: $K_f + U_f = K_i + U_i \rightarrow U_f - U_i = K_i$.

Sostituendo otteniamo $mgL(1-\cos\theta_{max}) = \frac{1}{2}mv_{cm}^2$ da cui $\theta_{max} = \arccos\left(1 - \frac{v_{cm}^2}{2gL}\right)$=0.20 rad.

3) Poichè l'angolo θ_{max} è piccolo, il moto è quello di un pendolo in regime di piccole oscillazioni. Il percorso fatto dal corpo **B** per raggiungere il punto di massima quota corrisponde ad un quarto di un'oscillazione completa che viene effettuata in un tempo $t_2 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$=0.71 s.

4) La forza applicata dalla corda al vincolo sul soffitto è in modulo uguale alla tensione τ del filo.

Scrivendo il II principio della dinamica e proiettando forze ed accelerazione lungo la direzione definita dalla corda abbiamo: $\tau - mg\cos\theta = \frac{mV_\theta^2}{L}$, dove abbiamo indicato con V_θ la velocità del corpo **B** quando la corda forma un angolo generico θ.

Abbiamo visto che possiamo esprimere la velocità V_θ per un generico angolo θ utilizzando la conservazione dell'energia meccanica: $v_\theta^2 = v_{cm}^2 - 2gL(1-\cos\theta)$ quindi $\tau = \frac{mV_\theta^2}{L} + mg\cos\theta = \frac{mV_{cm}^2}{L} - 2mg(1-\cos\theta) + mg\cos\theta = \frac{mV_{cm}^2}{L} + mg(3\cos\theta - 2)$.

Il valore è massimo quando $\theta=0$ e vale $\tau_{max} = \frac{mV_{cm}^2}{L} + mg$=5.1 N

Es. n. 3: soluzione:

(a) Se il cilindro, di raggio ***R***, ruota, di un angolo ***θ***, senza strisciare, l'accelerazione $a = |\vec{a}|$ del suo CM e l'accelerazione angolare α soddisfano la relazione $a = \frac{d^2\theta}{dt^2}R = \frac{d\omega}{dt}R = \alpha R$. Quindi, se il cilindro si muove con velocità costante, ossia $\boldsymbol{a = 0}$, vale anche $\alpha = 0$, ossia anche la sua velocità angolare **ω** è costante.

A priori sul cilindro agiscono due forze, entrambe orizzontali: la tensione della corda $\vec{\tau}$ e la forza di attrito $\vec{F}_a$. Le relative equazioni cardinali, proiettate sull'asse orizzontale sono:

$$\tau - F_a = M \cdot a \qquad (1)$$

$$R \cdot F_a = I \cdot \alpha \qquad (2)$$

dove abbiamo orientato $\vec{F}_a$ in verso opposto a quello del moto ed $I = \frac{1}{2}MR^2$ sta ad indicare il momento d'inerzia del cilindro.

Se $\boldsymbol{a = 0}$ ed $\boldsymbol{\alpha = 0}$ abbiamo $\boldsymbol{F_a = 0}$ e $\boldsymbol{\tau = 0}$.

Per il cubo la II equazione di Newton, proiettata sugli assi orizzontale e verticale fornisce:

$$F - \tau - \mu_d \cdot N = M \cdot a \qquad (3)$$

$$N - M \cdot g = 0 \qquad (4)$$

con $\boldsymbol{F = F_1}$.

Se $\boldsymbol{a = 0}$ e $\boldsymbol{\tau = 0}$ (dimostrato sopra) abbiamo $\boldsymbol{F_1 = \mu_d N = \mu_d M g}$ che implica

$$\boldsymbol{\mu_d = F_1/M g = 0.30}$$

(b) Dato che la corda è inestensibile, l'accelerazione del CM del cilindro è pari a quella del cubo: la indichiamo con $\boldsymbol{a}$. Dalle equazioni cardinali (1) e (2), utilizzando le relazioni già scritte per $\boldsymbol{I}$ ed $\boldsymbol{\alpha}$, abbiamo

$$\boldsymbol{F_a = 1/2\ M\ a}$$

$$\boldsymbol{\tau = M\ a + F_a = 3/2\ M\ a}$$

Dalle equazioni (3) e (4) otteniamo $\boldsymbol{N = M g}$ e $\boldsymbol{F_2 - 3/2\ M\ a - \mu_d M g = M\ a}$

$$\boldsymbol{a = 2/5\ (F_2/M - \mu_d\ g) = 1.18\ m/s^2}$$

La tensione della corda è pari a

$$\boldsymbol{\tau = 3/2\ M\ a = 3/5\ (F_2 - \mu_d M g) = 6.55\ N}$$

(c) La forza di attrito che agisce tra cilindro e piano è stata calcolata al punto (b) ed è pari a $\boldsymbol{F_a = 1/2\ M\ a}$. Dato che la reazione normale che il piano applica sul cilindro è $\boldsymbol{N_{cil} = M g}$ deve essere $\boldsymbol{1/2\ M\ a < \mu_s N_{cil} = \mu_s M g}$ da cui

$$\boldsymbol{\mu_s > a/(2\ g) = 1/5\ [\ F_2/(M g) - \mu_d\ ] = 0.060}\ .$$