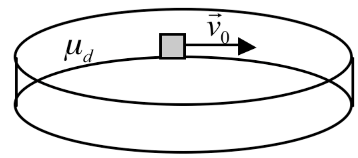
Prova scritta d'esame di Meccanica 19 luglio 2011

Esercizo n. 1

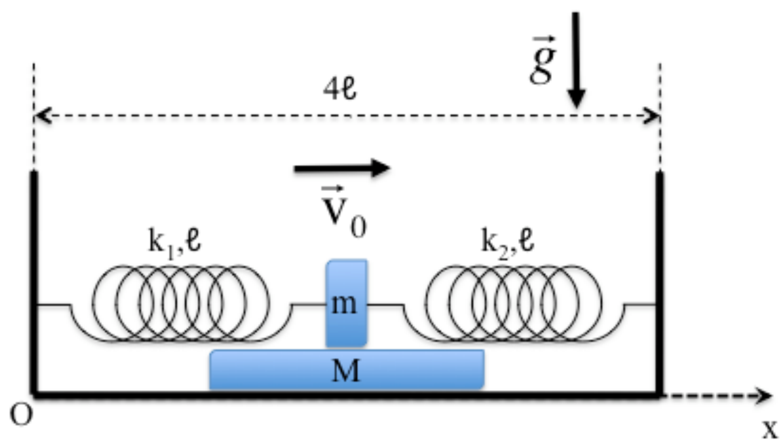
Un cubetto è sistemato all'interno di un anello vincolato a un piano orizzontale. Tra il cubetto e l'anello c'è attrito dinamico di coefficiente μ_d e tra il blocchetto e il piano non c'è attrito. Al tempo t=0 il blocchetto si muove di velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ diretta tangenzialmente all'anello.



1) Calcolare, all'istante iniziale, la reazione vincolare offerta dall'anello e l'accelerazione radiale e tangenziale del cubetto.
Il moto del cubetto può essere descritto dalla legge oraria del moto:
$s(t) = (R/\mu_d) \ln(1.0 + (\mu_d v_0 t)/R)$, dove R è il raggio dell'anello e s(t) rappresenta la posizione del cubetto lungo l'anello $(s(0) = 0)$.
2) Dalla s(t) dedurre le espressioni di v(t) e a(t) (velocità e accelerazione lungo l'anello) e verificare la consistenza con l'accelerazione tangenziale calcolata al punto 1.
3) Calcolare il lavoro fatto dalla forza di attrito fra t=0 e t=2.5 secondi.
Dati numerici:
$R = 1.50$ m, $\mu_d = 0.30$, $v_0 = 5.2$ m/s, m = 0.16 kg.

Esercizo n. 2

Su un piano orizzontale liscio, delimitato da due pareti fisse distanti 4ℓ, si trova una lastra di massa M al centro della quale (si veda figura) è appoggiato un blocchetto di massa m. Le dimensioni dei due corpi sono trascurabili rispetto alla distanza 4ℓ delle pareti (il disegno non è in scala). Le superfici di contatto fra la lastra M ed il blocchetto m sono scabre con μ_s mentre la lastra può scivolare senza attrito sul piano orizzontale. Il blocchetto m è collegato con due molle alle pareti.
La lunghezza a riposo delle molle è ℓ e le loro costanti elastiche valgono rispettivamente $k_2 = k$ e $k_1 = 2k$.

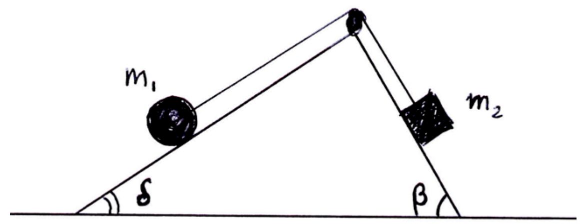


All'istante t = 0 i due corpi partono con velocità iniziale nulla dal centro fra le due pareti.
1) Si verifichi che i corpi si muovono solidali l'uno all'altro e si calcoli la posizione di equilibrio del moto armonico percorso dai due corpi solidali.
Si faccia ora l'ipotesi che i due corpi vengano lanciati, sempre dal centro fra le due pareti, con velocità v_0 verso destra. Si calcoli:
2) il valore massimo v_{max} della velocità iniziale per cui, durante il moto, non si ha mai slittamento relativo fra i due blocchi;
3) il valore del lavoro compiuto dalle forze elastiche dall'istante in cui le masse vengono lanciate all'istante in cui passano, per la prima volta, per la posizione di equilibrio. Si assuma che il moto dei due corpi sia solidale.
Dati numerici
M=2.0 kg; m=1.0 kg; $\ell = 1.0$ m; μ_s= 0.50; $k = 3.0$ N/m

Esame di **Meccanica**: Esercizi 1 + 2 + 3 in 3 ore
Esame di **Meccanica Classica:** Es. 1+2 in 2 ore
Esame di **Meccanica dei Sistemi:** Es. 2+3 in 2 ore

Prova scritta d'esame di Meccanica 19 luglio 2011

Esercizo n. 3



Una sfera di raggio R e massa m_1 è connessa da un filo inestensibile di massa trascurabile a un cubo di massa m_2. La sfera poggia su un piano inclinato di angolo δ, il cubo su un piano con inclinazione β. Il filo può scivolare senza attrito sul supporto mostrato in figura.

1) Assumendo che ci sia attrito fra cubo e piano inclinato, calcolare modulo e verso della forza di attrito agente sul cubo, con il sistema fermo e in equilibrio.

2) Se invece l'attrito sul cubo è nullo il sistema si mette in movimento. Calcolare modulo e verso della forza di attrito agente sulla sfera, assumendo che il moto di questa sia di puro rotolamento.

n.b.

a) La sfera è composta da due emisferi separati che permettono di collegare il filo al centro della sfera, lasciando libera la sfera di rotolare lungo il piano inclinato.

b) Nei due tratti inclinati il filo è parallelo ai piani.

Dati numerici:

δ = 0.5 rad, β = 0.8 rad, m_1 = 0.70 kg, m_2 = 0.90 Kg

Esame di **Meccanica**: Esercizi 1 + 2 + 3 in 3 ore

Esame di **Meccanica Classica:** Es. 1+2 in 2 ore

Esame di **Meccanica dei Sistemi:** Es. 2+3 in 2 ore

Prova scritta d'esame di Meccanica 19 luglio 2011

Esercizio n. 1, soluzione:

1) a(radiale) = v_0^2/R = 18.0 m/s^2 ;
W = reazione normale all'anello = ma(radiale) = 2.88 N
F(attrito) = $\mu_d W$
a(tangenziale) = - F(attrito)/m = $-\mu_d v_0^2/R$ = 5.4 m/s^2

2) v(t) = ds/dt = $(v_0R)/(R + \mu_d\, v_0\, t)$
a = dv/dt = $-((v_0R)/(R + \mu_d\, v_0\, t)^2)\, \mu_d\, v_0 = -\mu_d v^2/R$
(corrispondente alla a(tangenziale) calcolata al punto 1)

3) L = $\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$, con :
$v_f = v(t = 2.5\text{ s}) = (v_0R)/(R + \mu_d\, v_0\, 2.5)) = 1.44$ m/s ,
risulta L = - 2.0 J .

Esercizio n. 2, soluzione:

Assumiamo un S.R. con asse x orizzontale ed origine nel punto O come in figura.
Al blocchetto di massa m sono applicate le forze
$\vec{F}_1^{el} = -k_1(x-\ell)\hat{i}$, $\vec{F}_2^{el} = -k_2[(4\ell - x)-\ell](-\hat{i}) = k_2(3\ell - x)\hat{i}$, $\vec{F}^{att} = \mu_D mg(-\hat{v}_r)$
dove la forza di attrito $\vec{F}^{att}$ è diversa da zero solo se il blocchetto m e la massa M sono in moto relativo (con velocità $\vec{v}_r$) uno rispetto all'altra.

1) Se i due corpi si muovono solidalmente ($\vec{v}_r = 0$) allora per il sistema composto da m ed M vale la legge $\vec{F}_1^{el} + \vec{F}_2^{el} = (m+M)\vec{a} = [-k_1(x-\ell) + k_2(3\ell - x)]\hat{i}$.
Il moto si svolge solo lungo l'asse x pertanto possiamo scrivere
$(m+M)\ddot{x} = -k_1(x-\ell) + k_2(3\ell - x) = -2k(x-\ell) + k(3\ell - x) = 5k\ell - 3kx$.
Si ottiene quindi l'equazione $(m+M)\ddot{x} + 3kx = 5k\ell$ che ammette come soluzione una funzione armonica del tipo $x(t) = x_{eq} + A\sin(\omega t + \varphi)$.
La posizione di equilibrio si ottiene imponendo $\ddot{x} = 0 \;\Rightarrow\; 3kx_{eq} = 5k\ell \;\Rightarrow\; x_{eq} = \frac{5}{3}\ell$ =1.67m, la pulsazione del moto armonico è data da $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m+M}}$ =1.73 rad/s. I due corpi sono solidali nella posizione e condizioni indicate (entrambe fermi al centro fra le due pareti) se la forza di attrito statico fra m ed M è sufficiente ad accelerare M alla massima accelerazione prevista per tutto il moto armonico. Il moto dei due corpi, se solidali, è descritto da:
$\left(\vec{F}_1^{el} + \vec{F}_2^{el}\right)_{x=2\ell} = (2k(2\ell - \ell) - k(3\ell - 2\ell))\hat{i} = k\ell\hat{i} = (m+M)\vec{a}$, dove $\vec{a} = \frac{k\ell}{m+M}\hat{i}$, $|\vec{a}|$=1ms^{-2}, è l'accelerazione comune ai due corpi se si muovono solidalmente. La forza d'attrito fra m ed M deve quindi poter imprimere ad M l'accelerazione $\vec{a}$: $\left|\vec{F}^{attrito}_{necessaria}\right| = Ma$=2ms^{-2} .
Per i valori dati è verificato che $F^{attrito}_{necessaria} < F^{attrito}_{statica\,\max.} = \mu_s mg$=4.98 N quindi i due corpi si muovono solidalmente.

2) Affinchè le masse, lanciate assieme nel verso positivo delle x con velocità iniziale v_0, rimangano solidali per tutta l'oscillazione è necessario che la forza d'attrito fra i due corpi (m ed M) sia in grado di applicare ad M la massima accelerazione prevista dal moto. Sia $x(t) = x_{eq} + A_0\sin(\omega t + \varphi)$ la legge che descrive il moto oscillatorio (A_0 è l'ampiezza dell'oscillazione che si ottiene se la velocità iniziale è v_0). Si ha $\dot{x}(t) = \omega A_0\cos(\omega t + \varphi)$ e

---

Esame di **Meccanica**: Esercizi 1 + 2 + 3 in 3 ore
Esame di **Meccanica Classica:** Es. 1+2 in 2 ore
Esame di **Meccanica dei Sistemi:** Es. 2+3 in 2 ore

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ quindi il massimo valore, in modulo, della accelerazione si ha nei punti in cui $\sin(\omega t + \varphi)$=1, cioè nei punti in cui m ed M sono fermi al massimo della elongazione. In queste posizioni quindi $\ddot{x}_{\max} = -\omega^2 A_0$. La forza d'attrito sarà sufficiente a fornire tale accelerazione alla massa M fin quando $\mu_s mg \geq M\ddot{x}_{\max} = -\omega^2 A_0$. Dobbiamo trovare il massimo valore di v_0 ($v_0^{\max} \Rightarrow A_0^{\max}$) tale che valga la relazione $\mu_s mg = -\omega^2 A_0^{\max}$ da cui

$A_0^{\max} = \dfrac{\mu_s mg}{\omega^2}$=0.818 m.

Sul sistema agiscono solo forze elastiche quindi l'energia meccanica totale U + K si conserva. Invocando la conservazione della energia meccanica totale possiamo scrivere una relazione fra $A_0^{\max}$ e $v_0^{\max}$.

Calcoliamo l'energia potenziale usando come riferimento $x=x_{eq}$.

Per t=0 i due corpi si trovano nella posizione $x(t=0)=2\ell$ quindi

$$U_{ini} = \frac{1}{2}3k(2\ell - x_{eq})^2 = \frac{3}{2}k(2\ell - \frac{5}{3}\ell)^2 = \frac{3}{2}k\frac{1}{9}\ell^2 = \frac{1}{6}k\ell^2 \; ; \; K_{ini} = \frac{1}{2}(m+M)v_0^2 \; .$$

Nello stato finale la distanza dei due corpi dalla posizione di equilibrio è proprio l'ampiezza della oscillazione A_0.

$$U_{fin} = \frac{1}{2}3kA_0^2 \quad ; \quad K_{fin} = 0.$$

Abbiamo quindi $[\frac{1}{3}k\ell^2 + (m+M)v_0^2] = 3kA_0^2 \quad \Rightarrow \quad A_0^2 = \dfrac{\ell^2}{9} + \dfrac{(m+M)v_0^2}{3k} = \dfrac{\ell^2}{9} + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}$ ed ancora

$v_0 = \omega\sqrt{(A_0^2 - \frac{\ell^2}{9})}$ quindi $v_0^{\max} = \omega\sqrt{[(A_0^{\max})^2 - \frac{\ell^2}{9}]}$=1.29 ms^{-1}.

3) Il lavoro compiuto dalle forze elastiche è pari alla variazione della energia cinetica dei due corpi ed anche alla somma delle variazioni di energia potenziale cambiata di segno:

$$L_{elastiche} = K_{fin} - K_{in} = U_{in} - U_{fin} =$$

$$\left(\frac{1}{2}k_1(2\ell - \ell)^2 + \frac{1}{2}k_2(2\ell - \ell)^2\right) - \left(\frac{1}{2}k_1(x_{eq} - \ell)^2 + \frac{1}{2}k_2(4\ell - x_{eq} - \ell)^2\right) =$$

$$\left(k\ell^2 + \frac{1}{2}k\ell^2\right) - \left(k(\frac{5}{3}\ell - \ell)^2 + \frac{1}{2}k(3\ell - \frac{5}{3}\ell)^2\right) = k\ell^2\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{k\ell^2}{6} = 0.5 \text{ J}$$

Esercizio n. 3, soluzione:

1) Per l'equilibrio della sfera : T = m_1g senδ . Per l'equilibrio del cubo :
T – m_2g sinβ + fa = 0 (con fa = forza di attrito, orientata verso l'alto se positiva).
Eliminando T si trova: fa = m_2g sinβ – m_1g senδ = 3.0 N , orientata verso l'alto.

2) Per m_2 si ha: m_2a = m_2g sinβ - T .
Per m_1 si ha R(T - m_1g senδ) = I_Pα , con α = a/R accelerazione angolare della sfera e I_P momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse di rotazione passante per il punto di contatto col piano inclinato (I_P = 7/5 m_1 R^2). Eliminando T dalle due equazioni si ricava:
a = ((g R^2)(m_2g sinβ – m_1g senδ)) / (m_2R^2+I_P) = 1.62 m/s^2
Nota l'accelerazione a, si può ricavare F_A, la forza d'attrito agente sulla sfera, dall'equazione
F_AR = I_{CM} α , con α = a/R e I_{CM} = 2/5 m_1 R^2.
Risulta F_A = 0.46 N , orientata verso il basso.

Esame di **Meccanica**: Esercizi 1 + 2 + 3 in 3 ore
Esame di **Meccanica Classica:** Es. 1+2 in 2 ore
Esame di **Meccanica dei Sistemi:** Es. 2+3 in 2 ore