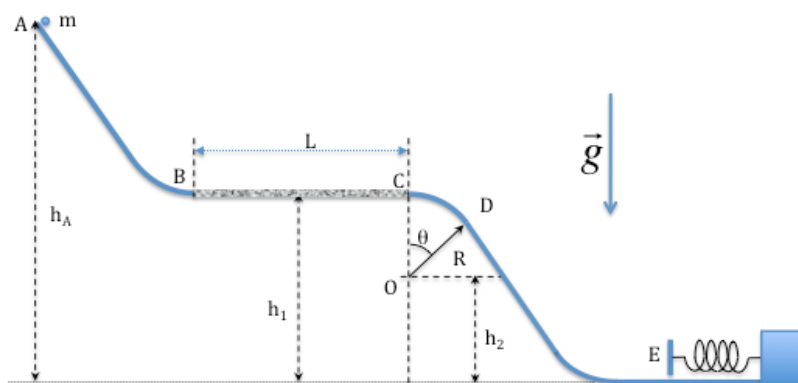


Meccanica - Primo compito d'esonero - A - 4 Maggio 2011

Esercizio n. 1

Si consideri la guida indicata in figura. Nel tratto **BC**, di lunghezza L vi è attrito con coefficiente di attrito dinamico μ_d ; altrove non vi è attrito. Il tratto **CD** è un arco di circonferenza di raggio R , il cui centro è in **O**. Dopo il punto **D** la guida continua rettilinea, tangente all'arco di cerchio in **D**, quindi si raccorda con un tratto orizzontale fino al punto **E** dove si trova una molla, non deformata, di costante elastica k . La quota del punto **C** rispetto al piano orizzontale è h_1 .



Un punto materiale di massa m parte dal punto **A**, posto alla quota h_A , con velocità nulla.

1. Si calcoli la velocità di m nel punto **C**.
2. Si calcoli il raggio minimo $R_{\min}$ tale che la massa m rimanga a contatto della guida anche nel tratto **CD**, non si stacchi cioè dalla guida prima di raggiungere il punto **D** (il segmento **OD** forma con la verticale un angolo θ).
3. Assumendo che $R \geq R_{\min}$ la massa m continua la discesa lungo la guida fino a **E** e poi comprime la molla. Si calcoli la massima compressione della molla;

Dopo aver compresso la molla, la massa inverte la velocità e compie il percorso inverso.

4. Con quale velocità m ripassa per **C**?

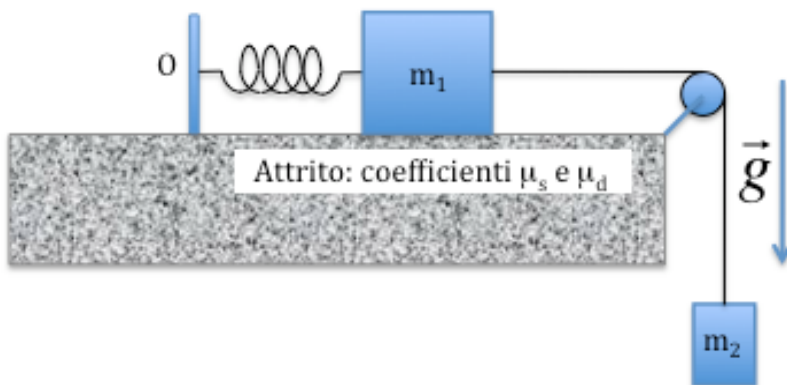
Valori numerici:

$h_A=205 \text{ cm}$, $L=1.25 \text{ m}$, $\mu_d=0.715$, $\theta=45^\circ$, $h_1=113 \text{ cm}$, $m=275\text{g}$, $k=100 \text{ N/m}$

Esercizio n. 2

Un blocco di massa m_1 posto su un piano orizzontale è connesso tramite un filo, inestensibile e di massa trascurabile che scorre su una puleggia di massa trascurabile priva d'attrito, ad un secondo blocco di massa m_2 .

Tra la massa m_1 e il piano vi è attrito con coefficienti di attrito, statico e dinamico, μ_s e μ_d . Il blocco m_1 è connesso ad una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo L_0 . L'altro estremo della molla (punto **O**) è fisso.



- a. Si calcoli l'intervallo di valori possibili per la costante elastica k della molla, se si osserva che il sistema può rimanere in equilibrio (masse ferme) con la molla estesa fino alla lunghezza L_1 .
- b. Per $k = k_{\text{eff}}$ (il valore di k_{eff} è indicato in calce) si calcoli la tensione del filo con m_1 fermo e in situazione di equilibrio (forza totale su m_1 nulla).
- c. Per $k = k_{\text{eff}}$ si assuma poi che al tempo $t=0$ la molla venga allungata fino a $2 \cdot L_1$ e che le masse siano ferme. A questo punto le due masse vengono lasciate libere di muoversi. Si calcoli il valore della minima distanza fra la massa m_1 ed il punto **O** nel moto successivo.
- d. Nelle condizioni descritte al punto c) si calcoli la tensione del filo al tempo $t=0$.
- e. Si calcoli quanto tempo è necessario per raggiungere la condizione di minima distanza.

Valori numerici: $m_1=0.75 \text{ kg}$, $m_2=2.2 \text{ kg}$, $L_0=85 \text{ cm}$, $L_1=1.1 \text{ m}$, $\mu_s=0.72$, $\mu_d=0.55$, $k_{\text{eff}}=90 \text{ N/m}$

Meccanica - Primo compito d'esonero - A - 4 Maggio 2011

Es. n. 1 – soluzione

1) Durante il percorso AB si conserva l'energia meccanica totale. Durante il percorso BC l'energia meccanica totale viene ridotta dal lavoro delle forze d'attrito $\mathcal{L}_{\text{attrito}} = -\mu_d mgL$:

$K_C + U_C = K_A + U_A + \mathcal{L}_{\text{attrito}} = U_A - \mu_d mgL$ essendo la massa inizialmente ferma. Si ha quindi

$$\frac{1}{2}mv_c^2 = mg(h_A - h_1) - \mu_d mgL = mg(h_A - h_1 - \mu_d L) \text{ da cui si ricava } v_c = \sqrt{2g(h_A - h_1 - \mu_d L)} = 0.718 \text{ m/s.}$$

2) Il punto D si trova alla quota $h_D = h_1 - R + R\cos\theta$

La velocità alla quota del punto D è data, applicando un'espressione analoga a quella ricavata al punto 1), dalla $v_D = \sqrt{2g(h_A - h_D - \mu_d L)}$. Affinché il punto materiale possa muoversi su una

traiettoria circolare di raggio R deve essere soggetto ad una forza "centripeta" di modulo $|\vec{F}_c| = \frac{mv_D^2}{R}$.

Tale accelerazione può essere fornita, nel nostro caso, solo dalla componente della forza peso lungo il raggio $mg\cos\theta$. Al diminuire del raggio il valore della forza centripeta richiesta aumenta per cui possiamo definire il valore minimo $R_{\min}$ per cui si abbia

$$\frac{mv_D^2}{R_{\min}} = \frac{m}{R_{\min}} 2g(h_A - (h_1 - R_{\min}(1 - \cos\theta)) - \mu_d L) = mg\cos\theta$$

$$2(h_A - (h_1 - R_{\min}(1 - \cos\theta)) - \mu_d L) = R_{\min} \cos\theta$$

$$2h_A - 2h_1 + 2R_{\min} - 2R_{\min} \cos\theta - 2\mu_d L = R_{\min} \cos\theta$$

$$R_{\min}(2 - 3\cos\theta) = 2(h_1 + \mu_d L - h_A)$$

$$R_{\min} = \frac{2(h_1 + \mu_d L - h_A)}{(2 - 3\cos\theta)}$$

si ricava quindi $R_{\min} = 43.3 \text{ cm}$.

3) supponendo che il punto materiale giunga quindi in E con la sua velocità v_E orizzontale possiamo calcolare la massima compressione della molla.

La velocità v_E è ancora data da $v_E = \sqrt{2g(h_A - h_E - \mu_d L)} = \sqrt{2g(h_A - \mu_d L)} = 4.76 \text{ m/s}$, l'energia cinetica del punto materiale si trasforma in energia potenziale della molla quando questa è massimamente

$$\text{compressa: } \frac{1}{2}k\Delta^2 = \frac{1}{2}mv_E^2 = mg(h_A - \mu_d L) \text{ da cui ricaviamo } \Delta = \sqrt{\frac{2mg(h_A - \mu_d L)}{K}} = 25.0 \text{ cm}$$

4) successivamente la molla si decomprime ed il punto materiale viene avviato a ripercorrere la guida in verso opposto. Fino al punto C il punto è soggetto solo a forze conservative pertanto giungerà in C con la stessa velocità con cui è transitato precedentemente $v_c = 0.718 \text{ m/s}$.

Meccanica - Primo compito d'esonero - A - 4 Maggio 2011

Es. n. 2 – soluzione

Il filo è inestensibile e di massa trascurabile pertanto:

- i moduli degli spostamenti (ed anche delle velocità e delle accelerazioni) delle due masse sono uguali ($a_1=a_2=a$)
- la tensione lungo il filo rimane costante in modulo, quindi se $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_2$ sono le forze applicate dal filo rispettivamente sulle masse m_1 ed m_2 $|\vec{\tau}_1| = |\vec{\tau}_2| = \tau$

Assumiamo un asse x orizzontale positivo verso destra e l'asse y rivolto verso l'alto.

a) Affinchè le due masse siano in equilibrio si deve avere:

$$\begin{aligned} -k(L_1 - L_0)\hat{x} + \vec{F}_s^{attrito} + m_1\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{\tau}_1 &= 0 \\ m_2\vec{g} + \vec{\tau}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Proiettando sugli assi cartesiani dalla seconda eq. otteniamo $\tau = \tau_2 = m_2g$, dalla prima equazione

$R_N = m_1g$; $-k(L_1 - L_0) \pm F_s^{attrito} + \tau = -k(L_1 - L_0) \pm F_s^{attrito} + m_2g = 0$ dove il segno della forza d'attrito statico dipende dal confronto fra la forza elastica e la forza peso della massa m_2 .

La massima forza d'attrito statico che può essere esercitata dal piano sul corpo m_1 è pari a

$$(F_s^{attrito})_{\max} = \mu_s R_N = \mu_s m_1 g .$$

Se $L_1 > L_0$ e la forza elastica si oppone alla forza τ , la forza che cerca di mettere in moto il corpo è pari a $m_2g - k(L_1 - L_0)$ e tale forza deve essere sempre minore (in modulo) a $\mu_s m_1g$:

$$|m_2g - k(L_1 - L_0)| \leq \mu_s m_1 g$$

Da questa disequaglianza otteniamo due relazioni:

se $m_2g - k(L_1 - L_0) > 0$ otteniamo $m_2g - k(L_1 - L_0) \leq \mu_s m_1 g$ e quindi $k_{\min} \geq \frac{m_2g - \mu_s m_1 g}{(L_1 - L_0)} = 65.1 \text{ N/m}$

se invece $m_2g - k(L_1 - L_0) < 0$ allora $m_2g - k(L_1 - L_0) \geq -\mu_s m_1 g$ e quindi $k_{\max} \leq \frac{m_2g + \mu_s m_1 g}{(L_1 - L_0)} = 108 \text{ N/m}$.

b) Per qualsiasi valore di $k_{\min} < k < k_{\max}$, e quindi anche per $k = k_{\text{eff}}$, essendo il sistema fermo in equilibrio, si ha che la tensione del filo $\tau = \tau_2 = m_2g = 21.6 \text{ N}$

c) Sia quindi $k = k_{\text{eff}}$ e sia $x(t=0) = 2L_1$.

Per i due punti materiali di massa m_1 ed m_2 , che subiscono lo stesso spostamento s , possiamo scrivere l'equazione $-k(s - L_0) + \mu_s m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2)\ddot{s}$

La forza d'attrito non è una forza conservativa e cambia segno al variare del verso del moto. Si avranno pertanto delle "pseudo-oscillazioni" con ampiezza decrescente e con "pseudo-periodo"

$$T_{\text{pseudo}} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{dove} \quad \omega_{\text{pseudo}} = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{e quindi} \quad T_{\text{pseudo}} = \frac{2\pi\sqrt{m_1 + m_2}}{\sqrt{k}}.$$

Meccanica - Primo compito d'esonero - A - 4 Maggio 2011

La condizione di minima distanza di m_1 dal punto O si ha alla fine della prima "semi-oscillazione": in tale condizione la forza d'attrito ha compiuto il lavoro $\mathcal{L}_{attrito} = -\mu_d m_1 g (2L_1 - d_{\min})$.

Visto che al tempo $t=0$ e nell'istante in cui m_1 ha la minima distanza da O i due punti materiali sono fermi (energia cinetica di m_1 ed m_2 nulla) possiamo legare la variazione di energia potenziale al $\mathcal{L}_{attrito}$. Se h_0 ed $h_{\min}$ rappresentano la quota della massa m_2 al tempo $t=0$ e $t=t_{\min}$ rispettivamente la variazione di energia potenziale gravitazionale è pari a $U_{d\min}^g - U_0^g = m_2 g (h_{d\min} - h_0)$ ma, essendo il filo inestensibile, è anche $U_{d\min}^g - U_0^g = m_2 g (2L_1 - d_{\min})$. La variazione dell'energia potenziale della molla è data da

$$U_{d\min}^{el} - U_0^{el} = \frac{1}{2} k (d_{\min} - L_0)^2 - \frac{1}{2} k (2L_1 - L_0)^2 = \frac{1}{2} k (d_{\min}^2 + L_0^2 - 2d_{\min}L_0 - 4L_1^2 - L_0^2 + 4L_1L_0) =$$

$$U_{d\min}^{el} - U_0^{el} = \frac{1}{2} k (d_{\min}^2 - 2d_{\min}L_0 - 4L_1^2 + 4L_1L_0) = \frac{1}{2} k (d_{\min}^2 - 4L_1^2 + 2L_0(2L_1 - d_{\min}))$$

Si ha quindi

$$\mathcal{L}_{attrito} = (U_{d\min}^g - U_0^g) + (U_{d\min}^{el} - U_0^{el}) = m_2 g (2L_1 - d_{\min}) + \frac{1}{2} k (d_{\min}^2 - 4L_1^2 + 2L_0(2L_1 - d_{\min}))$$

$$-\mu_d (2L_1 - d_{\min}) m_1 g = m_2 g (2L_1 - d_{\min}) - \frac{1}{2} k (2L_1 - d_{\min})(2L_1 + d_{\min}) + kL_0(2L_1 - d_{\min})$$

$$-\mu_d m_1 g = m_2 g - \frac{1}{2} k (2L_1 + d_{\min}) + kL_0 \quad \text{da cui} \quad d_{\min} = \frac{2}{k} (\mu_d m_1 g + k(L_0 - L_1) + m_2 g)$$

$$d_{\min} = 7.0 \text{ cm}$$

d) In questa condizione ($t=0$) la molla è elongata al massimo ($s(t=0)=2L_1$), le masse sono ferme ($\dot{s}(t=0)=0$), la massa m_2 è accelerata verso l'alto con accelerazione $a = |\ddot{s}|$. Dalla

$$-k(s - L_0) + \mu_d m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) \ddot{s} \quad \text{per } s=2L_1 \text{ otteniamo}$$

$$-k(2L_1 - L_0) + \mu_d m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) \ddot{s}(t=0) \quad \text{quindi}$$

$$\ddot{s}(t=0) = \frac{-k(2L_1 - L_0) + \mu_d m_1 g + m_2 g}{(m_1 + m_2)} = -32.5 \text{ ms}^{-2}$$

per cui si ha $-\tau_2 + m_2 g = m_2 \ddot{s}(t=0)$ da cui $\tau_2 = m_2 g - m_2 \ddot{s}(t=0) = 93.1 \text{ N}$

e) La distanza minima da O viene raggiunta dalla massa m_1 dopo la prima mezza "pseudo-

oscillazione" per cui per $t = \frac{T_{pseudo}}{2} = \frac{\pi \sqrt{m_1 + m_2}}{\sqrt{k}} = 0.569 \text{ s}$