Meccanica – A.A. 2011/12 - Secondo compito d'esonero – 11 giugno 2012

Un'asta omogenea di massa M e lunghezza L si trova in quiete su di un piano orizzontale liscio e privo di attrito; siano $P_1=(0,L/2)$ $P_2=(0,-L/2)$ le coordinate cartesiane degli estremi dell'asta in un dato sistema di riferimento fisso (x,y). Un proiettile di massa m percorre una traiettoria descritta, nello stesso sistema di riferimento, dall'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x(t) = -L/4 + V_x\, t + \frac{1}{2} A_x\, t^2 \\ y(t) = -L/4 \end{cases}$$

Determinare:

(1) in quale istante di tempo, t_o, avviene l'urto tra proiettile e asta;
(2) la posizione del centro di massa immediatamente dopo l'urto.

Supponendo che dopo l'urto non agiscano forze esterne sul sistema, e che il proiettile resti conficcato nell'asta, determinare(per $t>t_o$):

(3) le componenti del vettore velocità V_{cdm} del centro di massa del sistema (asta + proiettile);
(4) la velocità di rotazione ω del sistema (asta + proiettile);
(5) si scriva la legge oraria (x(t), y(t)) del centro geometrico dell'asta e se ne tracci un grafico qualitativo.
(6) l'energia cinetica totale nel sistema di riferimento del centro di massa.

Supponendo invece che l'urto proiettile/asta sia totalmente elastico e che dopo l'urto il proiettile rimbalzi indietro con velocità $\mathbf{v}_f$, discutere e giustificare i seguenti punti :

(7) il modulo di V_{cdm} sarebbe maggiore, minore od uguale a quello del caso precedente?
(8) la velocità angolare ω dell'asta sarebbe maggiore, minore od uguale a quello del caso precedente?
(9) si ricavino i valori delle componenti della velocità del proiettile (per $t>t_o$).

Si supponga infine, nel caso di urto elastico, che l'asta sia vincolata a ruotare intorno ad un asse verticale passante per l'estremo P_1,

(10) determinare la velocità angolare di rotazione intorno tale asse;
(11) determinare l'impulso trasferito nell'urto dal proiettile all'asta.

Dati Numerici

M = 5.0 kg
m = 500 g
L = 100 cm
V_x = 10 m/s
A_x = 20 m/s^2

Meccanica – A.A. 2011/12 - Secondo compito d'esonero – 11 giugno 2012

SOLUZIONI:

1)
$$t_0 = \frac{-v_x + \sqrt{v_x^2 + \frac{1}{2}AL}}{A}$$

(la soluzione con segno meno non ha senso fisico in questo contesto).

2)
$$x_{cdm} = 0$$
$$y_{cdm} = \frac{-Lm}{4(M+m)}$$

3) Se non agiscono forze esterne si conserva la quantità di moto del sistema: essendo
$$\dot{x}(t_0) = At_0 + V_x$$

$$m\dot{x}(t_0) = (M+m)\dot{x}_{cdm} \Rightarrow \dot{x}_{cdm} = \frac{m\dot{x}(t_0)}{(M+m)}$$
$$\dot{y}_{cdm} = 0$$

4) Si utilizza la conservazione del momento angolare e lo calcoliamo rispetto alla posizione del cdm al momento dell'urto t_0.

Sia $$L^{'} = \frac{L}{4} - |y_{cdm}|$$

la distanza tra centro di massa del sistema (asta+proiettile) ed il punto dell'asta in cui avviene l'urto. Il momento angolare iniziale del sistema all'istante dell'urto sarà

$$J = m\dot{x}(t_0)L^{'}$$

Il momento angolare subito dopo l'urto è pari a

$$J^{'} = I\omega$$

essendo I il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il cdm. Questo si calcola considerando la massa del proiettile alla distanza L' dall'asse di rotazione e utilizzando il teorema di Huygens-Steiner:

$$I = I_0 + My^2{}_{cdm} + m(L^{'})^2$$

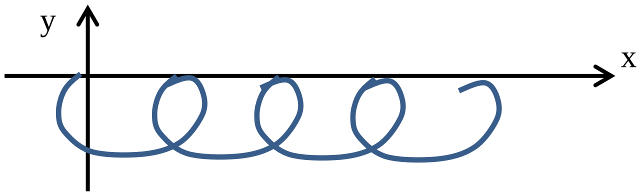
con $$I_0 = \frac{1}{12}ML^2$$

Meccanica – A.A. 2011/12 - Secondo compito d'esonero – 11 giugno 2012

da cui la velocità angolare:

$$\omega = J / I$$

5)
$$x(t) = -y_{cdm}(t_0)\sin(\omega(t - t_0) + v_{cdm}(t_0)t$$
$$y(t) = y_{cdm}(t_0)\cos(\omega(t - t_0) - y_{cdm}(t_0)$$



6)
$$K_{cdm} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

con I e ω determinati nei punti 3 e 4

7) Uguale (non ci sono forze esterne)

8) Se si considera la conservazione del momento angolare per urto elastico bisogna tenere conto anche della velocità di rimbalzo del proiettile dopo l'urto. Avrò una espressione del tipo

$$J_{in} = J_{fin} + I\omega$$

dove i momenti J del proiettile sono riferiti al centro geometrico dell'asta, così come il momento d'inerzia I. Poichè la velocità del proiettile si inverte dopo l'urto, il momento trasferito da questo all'asta è pari a

$$m\dot{x}(t_0)\frac{L}{4} + mv_f \frac{L}{4}$$

con entrambi i termini positivi. Nel caso anelastico si avrebbe

$$m\dot{x}(t_0)\frac{L}{4} = I'\omega'$$

con I' ed ω' calcolati rispetto al centro geometrico.

Si ottiene quindi $$I'\omega' + mv_f \frac{L}{4} = I\omega$$

Poichè in generale I'> I, se ne deduce che la velocità angolare nel caso di urto elastico in cui il proiettile rimbalza indietro è maggiore rispetto al caso anelastico.

9) Si utilizza la conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia. Tre equazioni nelle 3 incognite v_f , ω, e V_{asta} che sono rispettivamente la componente x della velocità finale del proiettile, la velocità angolare, la componete x della velocità del centro geometrico dell'asta. I momenti sono calcolati rispetto al centro geometrico dell'asta.

Si ha:

$$m\dot{x}(t_0) = MV_{asta} - mv_f$$

$$m\dot{x}(t_0)\frac{L}{4} = I\omega - mv_f\frac{L}{4}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t_0) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_f^{\ 2} + \frac{1}{2}MV^2_{\ asta}$$

Risolvendo il sistema nelle tre variabili si ricavano le espressioni:

$$V_{asta} = \frac{2\dot{x}(t_0)}{\left(\frac{7}{4} + \frac{M}{m}\right)}$$

$$v_f = \frac{M}{m}V_{asta} - \dot{x}(t_0)$$

$$\omega = \frac{3V_{asta}}{L}$$

usando per il momento d'inerzia l'espressione $I = \frac{ML^2}{12}$

10) In questo caso l'asta è vincolata a ruotare intorno a P_1. Si scrive la conservazione del momento angolare prendendo come polo l'asse intorno a cui l'asta è vincolata a ruotare:

$$m\dot{x}(t_0)\frac{3L}{4} = I'\omega' - mv_f\frac{3L}{4}$$

con

$$I' = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

che, insieme alla conservazione dell'energia nella forma

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t_0) = \frac{1}{2}I'\omega'^2 + \frac{1}{2}mv_f^{\ 2}$$

fornisce i valori cercati per v_f , ω

$$\omega = \frac{\frac{8}{3}\frac{\dot{x}(t_0)}{L}}{1+\frac{16M}{27m}}$$

$$v_f = \frac{4ML}{9m}\omega - \dot{x}(t_0)$$

11) dai valori del punto 10 si ricava

$$|\Delta p| = m(v_f + \dot{x}(t_0))$$

Risultati numerici con i valori del testo.

1) t_0= 2.4 10^{-2} sec

2) y_{cdm}= 0.023 m

3) $x(t_0)$ = 10.5 m/s x_{cmd} = 0.95 m/s

4) L'= 0.227 m,   J= 1.2 Kgm^2/s, I= 0.44 Kgm^2, ω= 2.7 s-1

6) K= 1.6 J

7)
8)
9) V_{asta}= 1.78 m/s , v_f= 7.37 m/s, ω= 5.34 s-1
10) ω= 4.04 m/s, v_f= 7.5 m/s
11) Δp= 9 Kgms-1

Meccanica – A.A. 2011/12 - Secondo compito d'esonero – 11 giugno 2012

Meccanica – A.A. 2011/12 - Secondo compito d'esonero – 11 giugno 2012