

## Meccanica – A.A. 2011/12 - Secondo compito d'esonero – 11 giugno 2012

Un'asta omogenea di massa  $M$  e lunghezza  $L$  si trova in quiete su di un piano orizzontale liscio e privo di attrito; siano  $P_1=(0,L/2)$   $P_2=(0,-L/2)$  le coordinate cartesiane degli estremi dell'asta in un dato sistema di riferimento fisso  $(x,y)$ . Un proiettile di massa  $m$  percorre una traiettoria descritta, nello stesso sistema di riferimento, dall'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x(t) = -x_0 + V_x t + \frac{1}{2} A_x t^2 \\ y(t) = -L/4 \end{cases}$$

Determinare:

- (1) la coordinata  $x_0$  sapendo l'istante di tempo,  $t_0$ , in cui avviene l'urto tra proiettile e asta;
- (2) la lunghezza  $L$  dell'asta conoscendo la coordinata verticale  $y_{\text{cdm}}$  del centro di massa del sistema (asta+proiettile) immediatamente dopo l'urto.

Supponendo che dopo l'urto non agiscano forze esterne sul sistema, e che il proiettile resti conficcato nell'asta, determinare(per  $t > t_0$ ):

- (3) le componenti del vettore velocità  $V_{\text{cdm}}$  del centro di massa del sistema (asta + proiettile);
- (4) la velocità di rotazione  $\omega$  del sistema (asta + proiettile);
- (5) si scriva la legge oraria  $(x(t), y(t))$  del centro geometrico dell'asta e se ne tracci un grafico qualitativo
- (6) l'energia cinetica totale nel sistema di riferimento del centro di massa.

Supponendo invece che l'urto proiettile/asta sia totalmente elastico e che dopo l'urto il proiettile rimbalzi indietro con velocità  $v_f$ , discutere e giustificare i seguenti punti :

- (7) il modulo di  $V_{\text{cdm}}$  sarebbe maggiore, minore od uguale a quello del caso precedente?
- (8) la velocità angolare  $\omega$  dell'asta sarebbe maggiore, minore od uguale a quello del caso precedente?
- (9) ) si ricavi il valore della velocità angolare dell'asta (per  $t > t_0$ ).

Si supponga infine, nel caso di urto elastico, che l'asta sia vincolata a ruotare intorno ad una asse verticale passante per l'estremo  $P_1$ ,

- (10) determinare per quale valore del rapporto  $M/m$  la velocità angolare di rotazione intorno tale asse assume il valore di  $\omega = 1.0 \text{ sec}^{-1}$  ;
- (11) determinare l'impulso trasferito nell'urto dal proiettile all'asta per il valore di  $M/m$  del punto precedente ed  $m = 0.6 \text{ Kg}$ .

### Dati Numerici

$$\begin{aligned} M &= 8.0 \text{ kg} \\ m &= 0.60 \text{ Kg} \\ V_x &= 10 \text{ m/s} \\ A_x &= 20 \text{ m/s}^2 \\ t_0 &= 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ sec} \\ y_{\text{cdm}} &= -3.0 \text{ cm} \end{aligned}$$

**SOLUZIONI:**

$$1) \quad x_0 = v_x t_0 + 1/2 a_x t_0^2$$

$$2) \quad x_{cdm} = 0$$

$$y_{cdm} = \frac{-Lm}{4(M+m)} \quad \text{da cui ricavo} \quad L = 4(m+M)y_{cm}/m$$

3) Se non agiscono forze esterne si conserva la quantità di moto del sistema:

essendo  $\dot{x}(t_0) = At_0 + V_x$

$$m\dot{x}(t_0) = (M+m)\dot{x}_{cdm} \Rightarrow \dot{x}_{cdm} = \frac{m\dot{x}(t_0)}{(M+m)}$$

$$\dot{y}_{cdm} = 0$$

4) Si utilizza la conservazione del momento angolare e lo calcoliamo rispetto alla posizione del cdm al momento dell'urto  $t_0$ .

Sia  $L' = \frac{L}{4} - |y_{cdm}|$

la distanza tra centro di massa del sistema (asta+proiettile) ed il punto dell'asta in cui avviene l'urto. Il momento angolare iniziale del sistema all'istante dell'urto sarà

$$J = m\dot{x}(t_0)L'$$

Il momento angolare subito dopo l'urto è pari a

$$J' = I\omega$$

essendo I il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il cdm. Questo si calcola considerando la massa del proiettile alla distanza  $L'$  dall'asse di rotazione e utilizzando il teorema di Huygens-Steiner:

$$I = I_0 + My_{cdm}^2 + m(L')^2$$

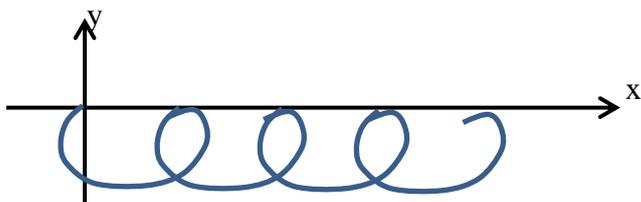
con  $I_0 = \frac{1}{12}ML^2$

Meccanica – A.A. 2011/12 - Secondo compito d'esonero – 11 giugno 2012

da cui la velocità angolare:  $\omega = J / I$

5)

$$\begin{aligned}x(t) &= -y_{cdm}(t_0) \sin(\omega(t-t_0) + v_{cdm}(t_0)t) \\y(t) &= y_{cdm}(t_0) \cos(\omega(t-t_0) - y_{cdm}(t_0))\end{aligned}$$



6)  $K_{cdm} = \frac{1}{2} I \omega^2$  con  $I$  e  $\omega$  determinati nei punti 3 e 4

7) Uguale

8) Se si considera la conservazione del momento angolare per urto elastico bisogna tenere conto anche della velocità di rimbalzo del proiettile dopo l'urto. Avrò una espressione del tipo

$$J_{in} = J_{fm} + I\omega$$

dove i momenti  $J$  del proiettile sono riferiti al centro geometrico dell'asta, così come il momento d'inerzia  $I$ . Poichè la velocità del proiettile si inverte dopo l'urto, il momento trasferito da questo all'asta è pari a

$$m\dot{x}(t_0) \frac{L}{4} + mv_f \frac{L}{4}$$

con entrambi i termini positivi. Nel caso anelastico si avrebbe

$$m\dot{x}(t_0) \frac{L}{4} = I' \omega'$$

con  $I'$  ed  $\omega'$  calcolati rispetto al centro geometrico.

Si ottiene quindi  $I' \omega' + mv_f \frac{L}{4} = I\omega$

Poichè in generale  $I' > I$ , se ne deduce che la velocità angolare nel caso di urto elastico in cui il proiettile rimbalza indietro è maggiore rispetto al caso anelastico.

Meccanica – A.A. 2011/12 - Secondo compito d'esonero – 11 giugno 2012

- 9) Si utilizza la conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia. Tre equazioni nelle 3 incognite  $v_f$ ,  $\omega$ , e  $V_{asta}$  che sono rispettivamente la componente x della velocità finale del proiettile, la velocità angolare, la componente x della velocità del centro geometrico dell'asta. I momenti sono calcolati rispetto al centro geometrico dell'asta.

si ha:

$$m\dot{x}(t_0) = MV_{asta} - mv_f$$

$$m\dot{x}(t_0)\frac{L}{4} = I\omega - mv_f\frac{L}{4}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t_0) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_{asta}^2$$

Risolvendo il sistema nelle tre variabili si ricavano le espressioni:

$$V_{asta} = \frac{2\dot{x}(t_0)}{\left(\frac{7}{4} + \frac{M}{m}\right)}$$

$$v_f = \frac{M}{m}V_{asta} - \dot{x}(t_0)$$

$$\omega = \frac{3V_{asta}}{L}$$

usando per il momento d'inerzia l'espressione  $I = \frac{ML^2}{12}$

- 10) In questo caso l'asta è vincolata a ruotare intorno a  $P_1$ . Si scrive la conservazione del momento angolare prendendo come polo l'asse intorno a cui l'asta è vincolata a ruotare:

$$m\dot{x}(t_0)\frac{3L}{4} = I'\omega' - mv_f\frac{3L}{4}$$

con

$$I' = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

insieme alla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t_0) = \frac{1}{2}I'\omega'^2 + \frac{1}{2}mv_f^2$$

fornisce i valori cercati per  $v_f$ ,  $\omega$

$$\omega = \frac{\frac{8}{3}\dot{x}(t_0)}{1 + \frac{16M}{27m}}$$

**Meccanica – A.A. 2011/12 - Secondo compito d'esonero – 11 giugno 2012**

$$v_f = \frac{4ML}{9m} \omega - \dot{x}(t_0)$$

**11)** dai valori del punto 10 si ricava

$$|\Delta p| = m(v_f + \dot{x}(t_0))$$

**Risultati numerici con i valori del testo.**

1)  $x_0 = 0.15 \text{ m}$

2)  $L = 1.72 \text{ m}$

3)  $x(t_0) = 10.3 \text{ m/s}$   $x_{cmd} = 0.72 \text{ m/s}$

4)  $L' = 0.40 \text{ m}$ ,  $J = 2.47 \text{ Kg m}^2/\text{s}$ ,  $I = 2.07 \text{ Kg m}^2$ ,  $\omega = 1.19 \text{ s}^{-1}$

6)  $K = 1.5 \text{ J}$

7)

8)

9)  $V_{asta} = 1.36 \text{ m/s}$ ,  $v_f = 7.9 \text{ m/s}$ ,  $\omega = 2.37 \text{ s}^{-1}$

10)  $M/m = 25.3$ ,  $v_f = 9.01 \text{ m/s}$

11)  $\Delta p = 11.6 \text{ Kg m s}^{-1}$