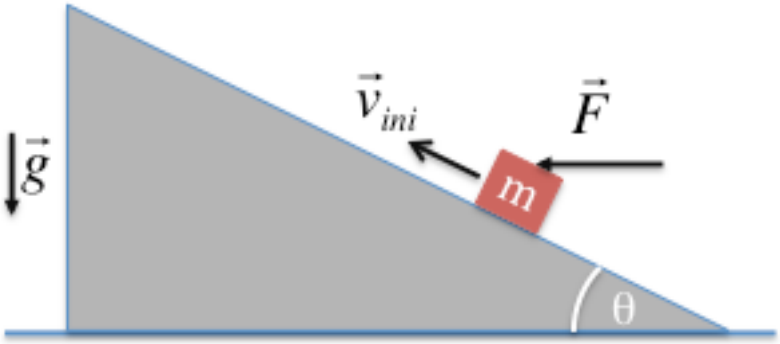
Meccanica – A.A. 2011/12 - Primo compito d'esonero – 24 Aprile 2012

Esercizio n. 1

Ad un blocco di massa m che si trova su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, è applicata la forza F orizzontale, disegnata in figura. Il coefficiente di attrito dinamico fra blocco ed il piano inclinato è μ_D. All'istante iniziale, $t=0$ il blocco è in moto lungo il piano inclinato con velocità v_{ini} verso l'alto.



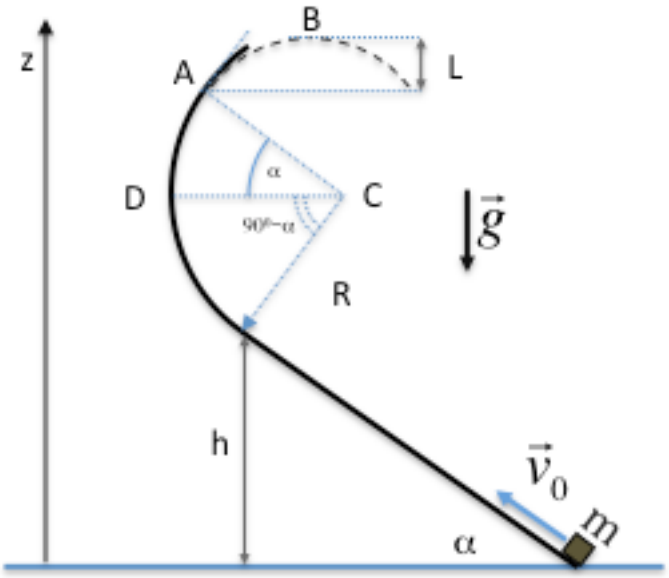
Si osserva che successivamente il blocco rallenta fino a fermarsi al tempo t_{fin}. Il corpo rimane poi fermo nella stessa posizione.

1) Si trovi la lunghezza dello spostamento del blocco fino all'istante t_{fin}.
2) Si calcoli il lavoro della forza totale agente sul blocco nell'intervallo di tempo t_{fin}.
3) Si calcoli per $t \geq t_{fin}$ (t_{fin} istante in cui il blocco si ferma) modulo, direzione e verso della forza d'attrito statica che il piano applica sul blocco.

Dati numerici: m = 6.2 kg , $\theta = 35^0$, F = 23 N , μ_D = 0.25 , v_{ini} = 5.2 m/s

Esercizio n. 2

Si consideri la guida indicata in figura, formata da un piano inclinato liscio di altezza h e inclinazione α ed un cerchio di raggio (ignoto) R e centro C.



Una massa viene lanciata verso l'alto con velocità v_0, percorre il piano inclinato, continua il suo moto lungo il cerchio per un angolo pari a 90^0 e quindi si stacca dalla guida nel punto A. La massa quindi prosegue il suo moto raggiungendo la massima quota nel punto B con velocità v_B. Se indichiamo con z la quota, sia $z_B - z_A = L$.

Si calcoli:

1) la velocità della massa nel punto A e l'altezza L;

2) la reazione vincolare in A ed il raggio R del cerchio;

3) la velocità della massa nel punto D e la reazione vincolare in D;

4) l'altezza h.

Dati numerici: $\alpha = 35^0$, v_0 = 4.25 m/s, v_B = 0.86 m/s , m = 0.65 kg.

Meccanica – A.A. 2011/12 - Primo compito d'esonero – 24 Aprile 2012

Es. 1 Soluzione

Assumiamo un S.R. con asse x lungo il piano inclinato e verso concorde con v_{ini} ed asse y ortogonale al piano con verso uscente dal piano. Sia $\vec{R}$ la reazione totale del piano sul blocco di massa m.

Usando il II principio della dinamica possiamo scrivere $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}$.

Proiettando sugli assi abbiamo:

asse x $F\,cos\theta - mg\,sin\theta - R_x = ma$ da cui $a = \frac{F\,cos\theta - mg\,sin\theta - R_x}{m}$

asse y $-F\,sin\theta - mg\,cos\theta + R_y = 0$ da cui $R_y = F\,sin\theta + mg\,cos\theta$

essendo $R_x = \mu_D R_y$ abbiamo $a = \frac{F\,cos\theta - mg\,sin\theta - \mu_D(F\,sin\theta + mg\,cos\theta)}{m}$=-5.1 ms^{-2}

1) Il moto è uniformemente ritardato. Assumendo x=0 nella posizione iniziale la legge del moto è espressa da $x(t) = v_{ini}\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$, $v(t) = v_{ini} + a\,t$. Possiamo quindi calcolare in quanto tempo il punto si fermerà $t_{fin} = -\frac{v_{ini}}{a}$=1.0 s.

Prima di fermarsi il blocco percorrerà la distanza $D = v_{ini}\,t_{fin} + \frac{1}{2}a\,{t_{fin}}^2$=2.6 m

2) Il lavoro compiuto dalla forza risultante applicata al blocco, nell'intervallo di tempo t_{fin}, è pari alla variazione della energia cinetica $L_{tot} = 0 - \frac{1}{2}mv_{ini}^2$=-84 J.

3) Per $t \geq t_{fin}$ il blocco rimane fermo, ciò implica che risultante delle forze lungo l'asse x è nulla $F\,cos\theta - mg\,sin\theta - R_x = 0$, in questo caso R_x è la forza d'attrito statico:
$R_x = F\,cos\theta - mg\,sin\theta$ = 16 N, diretta lungo il piano inclinato verso l'alto.

Es. 2 Soluzione

Nel punto A la reazione normale della guida sulla massa è nulla $|\vec{R}_A^n|$=0 in quanto l'accelerazione centripeta è fornita dalla componente di $\vec{g}$ lungo il raggio.

$$mg\cos(90^0 - \alpha) = mg\sin(\alpha) = \frac{mv_A^2}{R}$$

v_A ed R sono incognite.

Sappiamo che non ci sono attriti e quindi l'energia meccanica si conserva. In particolare conoscendo le velocità v_0 e v_B , ricordando che

$K_0 + U_0 = K_B + U_B$, assumendo $U_0 = 0$ possiamo scrivere $K_0 - K_B = U_B$

$\frac{1}{2}m(v_0^2 - v_B^2) = mg[h + L + R\,(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))]$.

Possiamo inoltre legare la componente verticale della velocità in A,

$v_A\sin(90^0 - \alpha) = v_A\cos(\alpha)$, al dislivello $z_B - z_A = L = \frac{v_A^2 cos^2(\alpha)}{2g}$ e la componente orizzontale della velocità in A alla velocità v_B: $v_B = v_A\sin(\alpha)$.

Possiamo quindi ricavare $v_A = \frac{v_B}{\sin(\alpha)}$ =1.50 m/s e quindi $R = \frac{v_A^2}{g\,\sin(\alpha)}$=0.40 m ed $L = \frac{v_A^2 cos^2(\alpha)}{2g}$=7.69*10^{-2} m.

Calcoliamo quindi il valore della quota

Meccanica – A.A. 2011/12 - Primo compito d'esonero – 24 Aprile 2012

$h = \frac{1}{2}\frac{(v_0^2 - v_B^2)}{g} - L - R\,[\sin(\alpha) + \cos(\alpha)]$=0.25 m

Possiamo calcolare la velocità nel punto D utilizzando la conservazione dell'energia meccanica $K_0 + U_0 = K_D + U_D$:

$\frac{1}{2}m(v_0^2 - v_D^2) = mg[h + R\cos(\alpha)]$ da cui

$v_D = \sqrt{{v_0}^2 - 2g[h + R\cos(\alpha)]}$ =2.60m/s

Nel punto D la reazione vincolare è responsabile interamente dell'accelerazione centripeta, possiamo quindi calcolarne l'intensità $\left|\vec{R}_D^n\right| = m\frac{v_D^2}{R}$=11.0N. La direzione della reazione normale in D è orizzontale, verso il centro della traiettoria.