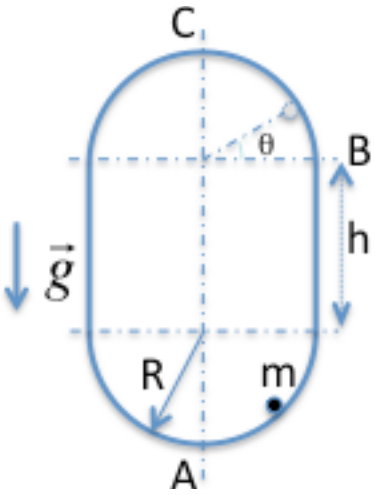
Prova scritta esame Meccanica del 20/07/2012

Meccanica Classica Es. 1, Meccanica dei Sistemi Continui Es.2, Meccanica Es.1,2,3

Esercizio 1 - Una pallina di massa m è appoggiata sul lato interno di una guida liscia verticale. La guida è composta da due tratti rettilinei di lunghezza h, connessi tra di loro mediante due tratti semicircolari di raggio R, così come mostrato in figura. Al tempo t=0 la pallina si trova nel punto più basso della guida, in A. Calcolare: 1) la minima velocità iniziale v_{min} che si deve imprimere alla pallina, quando essa si trova in A affinché questa percorra tutta la guida senza staccarsene. Se, invece, essa ha velocità $v_0 = 0.85\ v_{min}$ nel punto più basso della guida, calcolare: 2) a quale angolo, θ così come definito in figura, la pallina si stacca dalla guida; 3) la massima quota, rispetto ad A, a cui la pallina giungerebbe se dopo aver raggiunto B la pallina non fosse più costretta a muoversi sulla guida (in assenza cioè del semicerchio superiore della guida).



Dati:
Compito A: R = 52 cm , h = 55 cm
Compito B: R = 44 cm , h = 62 cm

Soluzione:

a) Descriviamo il moto della pallina, nel tratto circolare BC. Analizziamo le forze agenti su di essa: il peso e la reazione vincolare della guida. Le equazioni delle forze lungo gli assi x ed y (y parallelo e concorde alla velocità istantanea della pallina, x orientato verso il centro della circonferenza) considerando la posizione generica che forma un angolo θ con l'orizzontale (come in figura) è:

$-mg\cos\theta = m\, dv/dt$ in direzione tangenziale (lungo x) (1)
$N + mg\sin\theta = m\, v^2/R$ (in direzione normale, ovvero lungo y) (2).

La reazione vincolare $N > 0$ ed è uguale a zero proprio quando la pallina perde contatto con la guida e si stacca da essa.
Affinché la pallina percorra la guida deve poter superare il punto più alto C dove la componente della forza peso è massima e pari proprio a mg. In C si ha lungo la direzione normale: $N + mg = m\, v^2/R$ (infatti $\theta = \pi/2$ dunque $\sin\theta = 1$) e quindi la velocità in C per la quale pallina si staccherebbe dalla guida ($N = 0$) è data da $mg = m\, v_C^2/R$ e quindi:

$v_C = \sqrt{(gR)}$ (3).

La minima velocità che la pallina deve avere in A per raggiungere il punto C dove si stacca ($N = 0$) è calcolabile attraverso la conservazione dell'energia totale (siamo infatti in presenza di forze conservative) applicata allo stato iniziale A e a quello finale C: $K_A + U_A = K_C + U_C$. L'energia potenziale è di tipo gravitazionale. Fissando "lo zero" dell'energia potenziale al suolo possiamo scrivere:

$\frac{1}{2}\, m\, v_A^2 = \frac{1}{2}\, m\, v_C^2 + mg\,(2R + h) \Rightarrow v_A^2 = v_C^2 + 4gR + 2gh$
ed utilizzando la (3): $v_{A\,min}^2 = 5\ gR + 2gh$

Numericamente,

Prova scritta esame Meccanica del 20/07/2012

Meccanica Classica Es. 1, Meccanica dei Sistemi Continui Es.2, Meccanica Es.1,2,3

(compito A) v_{A_min}=6.0 m/s
(compito B) v_{A_min}=5.8 m/s

b) La velocità iniziale della pallina è ora: $v_0 = 0.85\ v_{A_min}$. Per definizione sappiamo che la pallina, superato B, si distaccherà dalla guida prima di giungere in C. Nella generica posizione che forma un angolo θ con l'orizzontale le equazioni del moto sono (1) e (2). Nel punto in cui la pallina si stacca (N = 0) la (2) diviene:

$mg \sin\theta = m v^2/R \Rightarrow v^2 = gR \sin\theta$

per la conservazione dell'energia tra A e questa generica posizione:

$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mg(R + h + R \sin\theta)$

Quindi la posizione in cui la pallina si stacca si può calcolare come segue:

$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m gR \sin\theta + mg(R + h + R \sin\theta)$
$\sin\theta = v_0^2/3Rg - 2/3(1+h/R)$

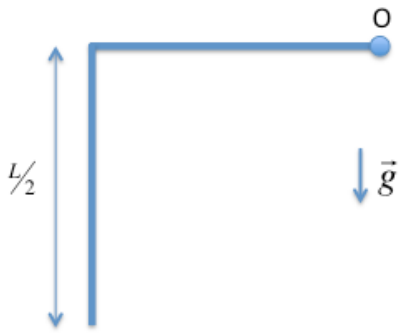
Numericamente abbiamo
(Compito A) θ = 20°
(Compito B) θ =16°

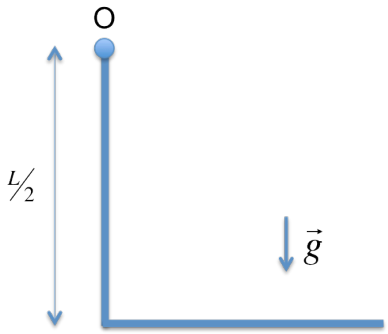
c) La pallina inizia il suo moto con velocità $v_0 = 0.85\ v_{A_min}$
(compito A) v_0 = 5.12 m/s
(compito B) v_0 = 4.94 m/s
Se dopo aver raggiunto B potesse seguire il suo moto verticale liberamente la sua quota massima sarebbe calcolabile applicando la conservazione della energia meccanica:
$\frac{1}{2} m v_0^2 = mg\, h_{max}$. Semplicemente quindi si ricava $h_{max} = v_0^2/2g$
(compito A) h_{max}=1.34 m
(compito B) h_{max}=1.24 m

Prova scritta esame Meccanica del 20/07/2012

Meccanica Classica Es. 1, Meccanica dei Sistemi Continui Es.2, Meccanica Es.1,2,3

Esercizio 2 - Una sbarra omogenea di lunghezza L e massa M è piegata a 90° al suo centro. La sbarra è vincolata a ruotare (senza attrito) intorno al suo estremo O. L'asse di rotazione è orizzontale e perpendicolare al piano verticale contenente la sbarra. Calcolare: 1) la posizione del centro di massa e il valore del momento d'inerzia rispetto all'asse passante per O. L'asta viene poi lasciata libera di ruotare, partendo da ferma dalla posizione indicata in figura (metà asta verticale). Calcolare: 2) l'accelerazione angolare iniziale; 3) la massima velocità angolare raggiunta dall'asta; 4) la reazione del vincolo quando la velocità angolare è massima.





Dati:
(compito A, disegno in alto) M = 2.0 kg, L= 80 cm
(compito B, disegno in basso) M = 1.4 kg, L = 60 cm

Soluzione:

Definiamo un riferimento cartesiano centrato in O con asse x orizzontale orientato verso destra, ed asse y verticale orientato verso l'alto. Sia: m = M/2, d = L/2.

Per il cm si ha:
$x_C = (-md/2 - md)/2m = -\frac{3}{4}\, d$ $y_C = (-md/2)/2m = -d/4$ (compito A)
$x_C = (md/2)/2m = d/4$ $y_C = (-md/2 - md))/2m = -\frac{3}{4}\, d$ (compito B)

Il momento d'inerzia si ottiene sommando i contributi delle due metà:
$I_1 = md^2/3$ $I_2 = (md^2/12 + m\,(d^2+(d/2)^2)$ $I=I_1+I_2= (5/3)md^2$

Numericamente:
(compito A) $x_C = -0.30$m $y_C = -0.10$ m $I = 0.267$ kg m^2
(compito B) $x_C = -0.075$m $y_C = -0.225$ m $I = 0.105$ kg m^2

Per rispondere alle domande 2),3),4) è utile calcolare il modulo del vettore che connette O al centro di massa C del sistema (r_C) e l'angolo che esso forma con la verticale θ_O:

$r_C = OC = (x_C^2+y_C^2)^{1/2}$
$\theta_O = \text{atg}(-x_C/y_C)$

Numericamente:
(compito A) $r_C = 0.316$ m $\theta_O = -1.25$ rad
(compito B) $r_C = 0.237$ m $\theta_O = 0.322$ rad

L'accelerazione angolare α_0 si ottiene dall'equazione $I\alpha_0 = -Mgr_C\sin\theta_0$
$\alpha_0 = 22.1$ s^{-2} (compito A) $\alpha_0 = -9.81$ s^{-2} (compito B)

La velocità massima si ha con il massimo dislivello del baricentro, $(\Delta h_C)_{max}$), usando l'equazione:

Prova scritta esame Meccanica del 20/07/2012

Meccanica Classica Es. 1, Meccanica dei Sistemi Continui Es.2, Meccanica Es.1,2,3

$\frac{1}{2} I \omega^2_{max} = Mg(\Delta h_C)_{max} = Mgr_C(1 - \cos\theta_O)$.

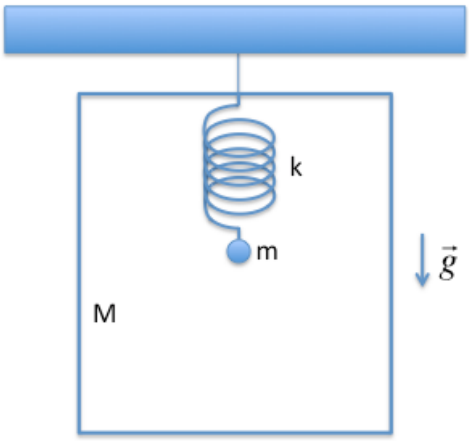
Numericamente:
$\omega_{max} = 5.64\ s^{-1}$ (compito A)
$\omega_{max} = 1.78\ s^{-1}$ (compito B)

La reazione vincolare R si ottiene dall'equazione: $M\mathbf{a}_C = \mathbf{R} + M\mathbf{g}$. Per $\omega=\omega_{max}$, $\mathbf{a}_C$ è verticale, verso l'alto, con $(\mathbf{a}_C)_y = r_C\omega^2_{max}$ e quindi $Rx = Rz = 0$, $Ry = Mg + Mr_C\omega^2_{max}$

(compito A) Ry = 39.7 N
(compito B) Ry = 14.8 N

Prova scritta esame Meccanica del 20/07/2012

Meccanica Classica Es. 1, Meccanica dei Sistemi Continui Es.2, Meccanica Es.1,2,3



Esercizio 3 - Si consideri una scatola di massa M all'interno della quale e' posta una molla di massa trascurabile e costante elastica k. La molla e' posta verticale, connessa superiormente alla scatola e inferiormente ad un blocchetto di massa m, come indicato in figura. Inizialmente la scatola e' ferma, sostenuta da un filo, e la massa m e' ferma. 1) Si calcoli l'allungamento Δ_0 della molla in queste condizioni. Al tempo t=0 il filo che sostiene la scatola si rompe e la scatola cade liberamente. Durante tale caduta, si osserva che la massa m all'interno della scatola comincia ad oscillare. Sia S' il sistema di riferimento solidale con il centro di massa del sistema scatola+blocchetto. Calcolare: 2) l'accelerazione del centro di massa del sistema scatola+blocchetto (nel riferimento fisso inerziale) e la forza apparente che agisce su scatola e blocco in S' durante la caduta; 3) l'accelerazione in S' della massa m durante la caduta all'istante iniziale (molla allungata di Δ_0) e quando la lunghezza della molla e' pari alla sua lunghezza a riposo; 4) il modulo della velocita' della massa m in S' quando la lunghezza della molla e' pari alla lunghezza a riposo; 5) l'ampiezza delle oscillazioni in S' della massa m.

Dati:
(compito A) m = 835 g, M = 3.05 kg, k = 102 N/m, g = 9.81 m/s^2
(compito B) m = 142 g, M = 203 g, k = 23 N/m, g = 9.81 m/s^2

Soluzione:

1) Sulla massa m agiscono la forza peso e la forza della molla. Se la massa m e' ferma la somma delle forze agenti deve essere nulla. Quindi

$k \Delta_0 - m g = 0 \qquad \Delta_0 = m g/k$

Numericamente abbiamo:

$\Delta_0 = 8.0$ cm (compito A)
$\Delta_0 = 6.1$ cm (compito B)

2) L'unica forza esterna che agisce sul sistema scatola+blocchetto e' la forza peso. Per la I equazione cardinale abbiamo (utilizziamo un sistema di riferimento con asse x diretto verso il basso)

$(m + M)\, a_{CM} = (m + M)\, g \qquad a_{CM} = g$

Le forze apparenti sono quindi:

$F_{ap}^{M} = -M g$, $F_{ap}^{m} = -m g$

Numericamente abbiamo

$F_{ap}^{M} = -30$ N, $F_{ap}^{m} = -8.2$ N, (compito A)
$F_{ap}^{M} = -2.0$ N, $F_{ap}^{m} = -1.4$ N (compito B)

3) Nel sistema S' agiscono sulle due masse la forza della molla, la forza peso e la forza apparente. Le equazioni di Newton sono quindi

Prova scritta esame Meccanica del 20/07/2012

Meccanica Classica Es. 1, Meccanica dei Sistemi Continui Es.2, Meccanica Es.1,2,3

$M\, a_{M'} = k\,(x_{rel} - l_0) + F_{peso} + F_{ap} = k\,(x_{rel} - l_0) - Mg + Mg = k\,(x_{rel} - l_0)$
$m\, a_{m'} = -\,k\,(x_{rel} - l_0) + F_{peso} + F_{ap} = -\,k\,(x_{rel} - l_0) - mg + mg = -\,k\,(x_{rel} - l_0)$

con $x_{rel} = x_m - x_M$.
Quando la molla e' allungata di Δ_0 (ossia $x_{rel} = l_0 + \Delta_0$) abbiamo

$a_{m'} = -k\,\Delta_0 / m$

ossia, utilizzando l'espressione di Δ_0, $a_{m'} = -g$.

Quando la lunghezza della molla e' pari alla lunghezza a riposo, ossia
$x_{rel} = l_0$, abbiamo $a_{m'} = 0$.

4) La forza peso e la forza apparente si elidono esattamente per cui in S' la somma di tutte le forze esterne e' nulla. Quindi in S' si conserva la quantita' di moto, ossia (v_m e v_M sono le velocita' in S')

$M\, v_M + m\, v_m = Q_{iniziale} = 0$

Si conserva anche l'energia per cui

$1/2\, M\, v_M^2 + 1/2\, m\, v_m^2 = 1/2\, k\, \Delta_0^2$

da cui si ottiene

$v_m = -\,M\, v_M / m$
$M\, v_M^2 + M^2\, v_M^2/m = k\, \Delta_0^2$

e quindi

$$|v_M| = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{m\,M\,k\,\Delta_0^2}{m+M}}$$

$$|v_m| = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{m\,M\,k\,\Delta_0^2}{m+M}}$$

Numericamente abbiamo:

$|v_M| = 0.22$ m/s $\quad |v_m| = 0.79$ m/s $\quad$ (compito A)
$|v_M| = 0.41$ m/s $\quad |v_m| = 0.59$ m/s $\quad$ (compito A)

Alternativamente, si poteva notare che la velocita' del centro di massa e' nulla (siamo nel sistema del centro di massa!). Quindi, utilizzando il teorema di Koenig per l'energia cinetica, si ha

$1/2\, \mu\, v_{rel}^2 = 1/2\, k\, \Delta_0^2$

dove $v_{rel} = v_m - v_M$ e' la velocita' relativa e μ la massa ridotta. Ne segue

Prova scritta esame Meccanica del 20/07/2012

Meccanica Classica Es. 1, Meccanica dei Sistemi Continui Es.2, Meccanica Es.1,2,3

$$|v_{rel}| = \sqrt{\frac{k\,\Delta_0^2}{\mu}}$$

Infine

$| v_m | = \mu / m \; v_{rel}$
$| v_M | = \mu / M \; v_{rel}$

che fornisce lo stesso risultato. Numericamente

$\mu = 0.656$ kg, $v_{rel} = 1.0$ m/s (compito A)
$\mu = 0.084$ kg, $v_{rel} = 1.0$ m/s (compito B)

5) Dato che agisce solo la forza della molla, la posizione di equilibrio corrisponde a $x_{rel} = l_0$. Quindi l'ampiezza delle oscillazioni nel sistema solidale alla scatola e' pari a Δ_0. Nel riferimento S', il centro di massa e' fermo per definizione. Se chiamiamo Δ_m lo spostamento della massa m rispetto al CM, e Δ_M lo spostamento della massa M rispetto al CM, allora si ha sempre:

$-m\Delta_m + M\Delta_M = 0$

nel momento della massima elongazione della molla, si ha anche

$\Delta_m + \Delta_M = \Delta_0$

Da cui si ottiene

$$\Delta_m = \frac{M\Delta_0}{m+M}$$

Numericamente:

(compito A) $\Delta_m = 6.3$ cm
(compito B) $\Delta_m = 3.6$ cm

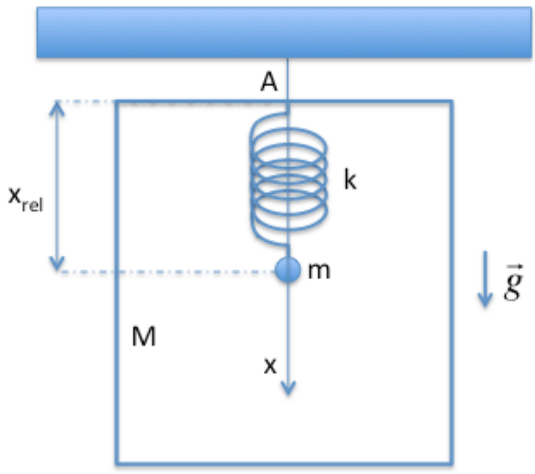
Soluzione alternativa

1) Sulla massa m agiscono la forza peso e la forza della molla. Se la massa m è ferma la somma delle forze agenti deve essere nulla. Quindi

$k\,\Delta_0 - m\,g = 0 \qquad \Delta_0 = m\,g/k$

Numericamente abbiamo:

$\Delta_0 = 8.0$ cm (compito A)
$\Delta_0 = 6.1$ cm (compito B)



2) L'unica forza esterna che agisce sul sistema scatola +

Prova scritta esame Meccanica del 20/07/2012

Meccanica Classica Es. 1, Meccanica dei Sistemi Continui Es.2, Meccanica Es.1,2,3

blocchetto è la forza peso. Per la I equazione cardinale abbiamo (utilizziamo un sistema di riferimento con asse x diretto verso il basso)

$(m + M)\, a_{CM} = (m + M)\, g \qquad a_{CM} = g$

Le forze apparenti sono quindi:

$F_{ap}^{M} = -M\, g,\ F_{ap}^{m} = -m\, g$

Numericamente abbiamo

$F_{ap}^{M} = -30$ N, $F_{ap}^{m} = -8.2$ N, (compito A)
$F_{ap}^{M} = -2.0$ N, $F_{ap}^{m} = -1.4$ N (compito B)

3) Nel sistema di riferimento S', non inerziale, solidale con il centro di massa quindi l'unica forza che agisce sui due corpi (scatola e blocchetto) e ne definisce l'accelerazione relativa è la forza elastica della molla. Siamo quindi nel classico caso del "problema dei due corpi" in cui possiamo prendere in esame come varia nel tempo la "distanza relativa" fra i due corpi (fra il blocchetto ed un punto qualsiasi della scatola, ad esempio il punto A) sotto l'effetto della forza elastica.
In particolare, definendo L_0 la lunghezza a riposo della molla, possiamo scrivere

$x_{rel}(t) = L_0 + \Delta_0 \sin(\omega t + \phi)$ dove $\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$ e $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ è la massa ridotta.

sapendo che all'istante iniziale (t=0):

$x_{rel}(t=0) = L_0 + \Delta_0$ e $v_{rel}(t=0) = \omega \Delta_0 \sin(\phi) = 0$ ne deduciamo $\phi = \frac{\pi}{2}$ e quindi possiamo scrivere:

$x_{rel}(t) = L_0 + \Delta_0 \cos(\omega t)$; $v_{rel}(t) = -\omega \Delta_0 \sin(\omega t)$; $a_{rel}(t) = -\omega^2 \Delta_0 \cos(\omega t)$

$v_{rel}(t)$ e $a_{rel}(t)$ sono le velocità fra il blocchetto di massa m ed il c.d.m. della scatola M ma sono anche la velocità e l'accelerazione con cui il blocchetto si muove rispetto al punto A.

Nel sistema di riferimento (non inerziale) S' inoltre non agiscono forze esterne e quindi la posizione del Centro di Massa rimane invariata:

$x^{CM} = \frac{x_M M + x_m m}{M+m} = \text{cost}$

da ciò deriva $\dot{x}^{CM} = 0 = \dot{x}_M M + \dot{x}_m m$ ed anche $\ddot{x}^{CM} = 0 = \ddot{x}_M M + \ddot{x}_m m$.

Da queste equazioni ricaviamo $\dot{x}_M(t) = -\dot{x}_m(t)\frac{m}{M}$ e $\ddot{x}_M(t) = -\ddot{x}_m(t)\frac{m}{M}$

D'altra parte $v_{rel}(t) = \dot{x}_m(t) - \dot{x}_A(t) = \dot{x}_m(t) - \dot{x}_M(t)$ ed analogamente

$$a_{rel}(t) = \ddot{x}_m(t) - \ddot{x}_M(t)$$

Volendo ricavare quindi l'accelerazione e la velocità di m nel S.R. non inerziale S' possiamo scrivere:

$$v_{rel}(t) = \dot{x}_m(t)\frac{m}{M} + \dot{x}_m(t) = \dot{x}_m(t)\frac{(M+m)}{M}$$
$$a_{rel}(t) = \ddot{x}_m(t)\frac{m}{M} + \ddot{x}_m(t) = \ddot{x}_m(t)\frac{(M+m)}{M}$$

Quindi all'istante iniziale t=0 si ha:

Prova scritta esame Meccanica del 20/07/2012

Meccanica Classica Es. 1, Meccanica dei Sistemi Continui Es.2, Meccanica Es.1,2,3

$$\ddot{x}_m(0) = a_{rel}(0)\frac{M}{(M+m)} = -\omega^2\Delta_0\frac{M}{(M+m)} = -\frac{k}{\frac{Mm}{(M+m)}}\Delta_0\frac{M}{(M+m)} = \frac{-k\Delta_0}{m}$$

Ricordando che Δ_0 = m g/k possiamo scrivere $\ddot{x}_m(0) = -g = -9.81\ ms^{-2}$.

L'accelerazione di m nel S.R. non inerziale S' solidale con la scatola nell'istante in cui la molla ha lunghezza pari a quella di riposo è chiaramente nulla in quanto in quell'istante l'unica forza attiva in quel S.R. è nulla. In ogni caso tale valore può essere calcolato tenendo conto che essendo $x_{rel}(t) = L_0 + \Delta_0\cos(\omega t)$ la condizione $x_{rel}(t_{riposo}) = L_0$ si ha quando $\cos(\omega t_{riposo}) = 0$. In tali condizioni anche $a_{rel}(t) = -\omega^2\Delta_0\cos(\omega t_{riposo}) = 0$ e quindi $\ddot{x}_m(0) = a_{rel}(0)\frac{M}{(M+m)} = 0$.

4) Quando la molla ha lunghezza pari a quella di riposo $\cos(\omega t_{riposo}) = 0$ e $sin(\omega t_{riposo}) = \pm 1$. In tali condizioni quindi:

$$\left|v_{rel}(t_{riposo})\right| = \omega\Delta_0\sin(\omega t_{riposo}) = \omega\Delta_0$$

Quindi il modulo della velocità di m nel S.R. non inerziale S' solidale con la scatola nell'istante in cui la molla ha lunghezza pari a quella di riposo:

$$\left|\dot{x}_m(t_{riposo})\right| = \left|v_{rel}(t_{riposo})\right|\frac{M}{(M+m)} = \omega\Delta_0\frac{M}{(M+m)} = \Delta_0\sqrt{\frac{km}{M(M+m)}}$$

Numericamente abbiamo:

$\left|\dot{x}_m(t_{riposo})\right|$ = 0.22 m/s $\left|\dot{x}_m(t_{riposo})\right|$ = 0.79 m/s (compito A)
$\left|\dot{x}_m(t_{riposo})\right|$ = 0.41 m/s $\left|\dot{x}_m(t_{riposo})\right|$ = 0.59 m/s (compito B)

5) Come nella soluzione precedente