

Soluzioni

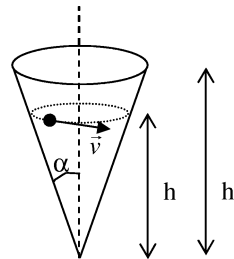
Esercizio 1

Sulla parete interna di un imbuto conico ($\alpha=20^\circ$) può scivolare senza attrito una pallina puntiforme di massa $m=0.1 \text{ kg}$. Se la pallina compie una traiettoria circolare orizzontale di velocità uniforme ad una quota $h=10 \text{ cm}$ dal vertice inferiore dell'imbuto (vedi disegno) calcolare:

- la reazione vincolare R dell'imbuto sulla pallina;
- la velocità v della pallina;
- l'accelerazione tangenziale (a_T) e centripeta (a_R) della pallina.

Se alla pallina viene impressa una $v'=1.5v$ alla quota h , essa esce dalla traiettoria circolare, raggiunge successivamente la quota massima $h'=15 \text{ cm}$ dell'imbuto e schizza via.

- Calcolare il modulo della velocità v' della pallina quando abbandona la superficie dell'imbuto.



La pallina compie una traiettoria circolare di raggio $r = h \tan \alpha = 0.036 \text{ m}$.
Si tratta di un moto circolare uniforme, quindi

$$\begin{aligned} a_t &= 0 \\ a_n &= v^2/r \end{aligned}$$

a. Sulla pallina agiscono la forza peso e la reazione vincolare R . Il secondo principio della dinamica proiettato lungo la direzione verticale fornisce

$$R \sin \alpha - mg = 0$$

Da cui

$$R = mg/\sin \alpha = 2.9 \text{ N}$$

b. Il secondo principio della dinamica lungo la direzione verticale fornisce

$$R \cos \alpha = m a_n = m v^2 / r$$

Da cui la velocità della pallina risulta:

$$v = (R r \cos \alpha / m)^{1/2} = (g r / \tan \alpha)^{1/2} = 0.99 \text{ m/s}$$

c. Per quanto detto l'accelerazione tangenziale è nulla mentre quella centripeta risulta:

$$a_n = v^2 / r = 27 \text{ m/s}^2$$

d. L'unica forza che può fare lavoro è quella peso (la reazione vincolare è sempre perpendicolare alla velocità e non fa lavoro). Dunque nel caso $v' = 1.5 v$ possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica per le quote h e h' :

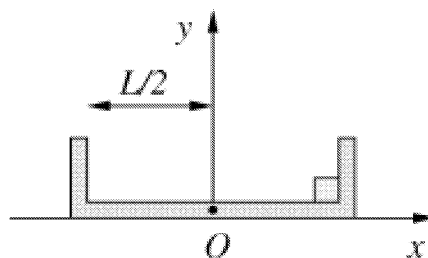
$$mgh + 1/2 m v^2 = mgh' + 1/2 m (v')^2$$

$$v' = (v^2 - 2g(h' - h))^{1/2} = 1.1 \text{ m/s}$$

Esercizio 2

Si consideri una slitta di massa $m=15\text{ kg}$ e lunghezza L sulla quale è posta una massa puntiforme $M=6\text{ kg}$ che può scivolare senza attrito sul piano della slitta stessa. Inizialmente il sistema è fermo, il centro di massa della slitta si trova nell'origine di un sistema di riferimento O e la massa si trova all'estremo destro della slitta ($x_M = L/2$). Una piccola carica esplosiva (posta tra la massa e la parete della slitta) mette in moto il sistema.

- Sapendo che il modulo della velocità relativa tra la massa e la slitta è pari a $v_r=6\text{ m/s}$, determinare le velocità della slitta (v_m) e della massa (v_M) nel sistema di riferimento O .
- Ad un istante successivo la massa urta elasticamente contro la parete sinistra della slitta, determinare le velocità della slitta (v'_m) e della massa (v'_M) dopo l'urto nel sistema di riferimento O .
- Successivamente, la massa urta in modo totalmente anelastico contro la parete destra della slitta. Si calcolino le due velocità (v''_m e v''_M) dopo l'urto.



- a. Le velocità v_r , v_M e v_m sono legate da

$$v_r = v_M - v_m.$$

Si tratta di un sistema isolato per il quale si conserva quindi la quantità di moto, che è nulla all'istante iniziale. Pertanto:

$$Mv_M + mv_m = 0.$$

Combinando le due equazioni precedenti si ottiene:

$$\begin{aligned} v_M &= -\frac{m}{m+M}v_r = -4.3\text{ m/s}, \\ v_m &= \frac{M}{m+M}v_r = 1.7\text{ m/s}. \end{aligned}$$

b. Nell'urto elastico si conservano energia cinetica e quantità di moto

$$\begin{cases} Mv_M + mv_m = 0 \\ Mv'_M + mv'_m = 0 \\ \frac{1}{2}(Mv'^2_M + mv'^2_m) = \frac{1}{2}(Mv^2_M + mv^2_m) \\ v_m = -\frac{M}{m}v_M \\ v'_m = -\frac{M}{m}v'_M \\ v'^2_M(M + \frac{M^2}{m}) = v^2_M(M + \frac{M^2}{m}) \end{cases}$$

quindi:

$$v'_M = \pm v_M \text{ e } v'_m = \pm v_m.$$

escludendo la soluzione che corrisponde alla situazione prima dell'urto, risulta:

$$v'_M = 4.3 \text{ m/s,}$$

$$v'_m = -1.7 \text{ m/s.}$$

c. Dopo l'urto anelastico i due corpi divengono solidali e quindi la velocità relativa è nulla, per cui $v''_m = v''_M$. Il sistema è sempre isolato, e quindi la quantità di moto continua ad essere nulla:

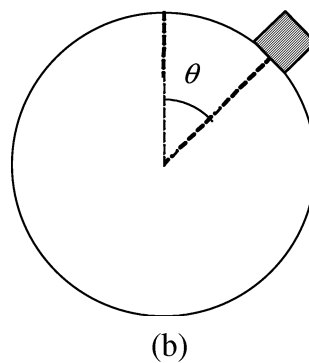
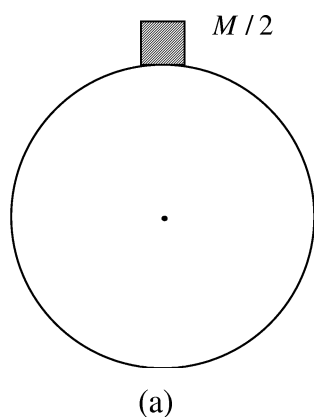
$$0 = Mv''_M + mv''_m = (M + m)v''_m$$

Ne consegue che $v''_m = v''_M = 0$, il sistema dunque si ferma.

Esercizio 3

Si consideri un cilindro omogeneo di massa $M=1.0\text{ kg}$ e raggio $R=10\text{ cm}$ libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale senza attriti. Su di esso viene posta una massa puntiforme $M/2$, come mostrato nella figura (a). All'istante iniziale il sistema è fermo in equilibrio instabile. Successivamente, l'equilibrio del sistema cilindro/massa viene perturbato e inizia una rotazione con velocità iniziale trascurabile. Tra la massa ed il cilindro vi è attrito (coefficiente di attrito statico $\mu_s=0.30$) e quindi, per piccoli valori di θ ($\theta < \theta_{\max}$), la massa è solidale al cilindro e questa non striscia sul cilindro. In queste condizioni, per $\theta=10^\circ$, si calcoli:

- la velocità angolare (ω) e l'accelerazione angolare (α) del cilindro;
 - l'accelerazione radiale (a_R) e tangenziale (a_T) della massa puntiforme;
 - la forza di attrito (F_A) e la reazione vincolare (N) normale che agiscono sulla massa.
- d. Si calcoli infine il valore $\theta_{\max}$ per il quale la massa puntiforme inizia a strisciare.



a. Le forze esterne applicate al sistema sono conservative, quindi si conserva l'energia meccanica. L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2.$$

Il momento di inerzia è la somma di quello del cilindro e di quello della massa $M/2$:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{M}{2} R^2 = M R^2.$$

L'energia potenziale gravitazionale è associata alla quota della massa $M/2$; prendendo come riferimento la quota del centro del cilindro,

$$U = \frac{M}{2} g R \cos \theta.$$

Quindi

$$E = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}gR\cos\theta$$

e' costante, e calcolandola nella situazione iniziale

$$E = \frac{M}{2}gR$$

per cui la velocità angolare è la radice di

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(1 - \cos\theta).$$

Differenziando questa espressione rispetto al tempo e dividendo per $2\dot{\theta}$ abbiamo l'accelerazione angolare:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2R}\sin\theta.$$

Numericamente

$$\dot{\theta} = 1.2 \text{ rad/s} \quad \ddot{\theta} = 8.5 \text{ rad/s}^2.$$

b. Le accelerazioni radiali e tangenziali della massa sono:

$$\begin{aligned} a_t &= R\ddot{\theta} = \frac{g}{2}\sin\theta = 0.85 \text{ m/s}^2 \\ a_n &= R\dot{\theta}^2 = g(1 - \cos\theta) = 0.15 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

c. Il secondo principio della dinamica applicato alla massa e proiettato lungo una direzione normale alla superficie del cilindro fornisce:

$$N - \frac{M}{2}g\cos\theta = -\frac{M}{2}a_n = -\frac{M}{2}g(1 - \cos\theta)$$

quindi

$$N = -\frac{Mg}{2} + Mg\cos\theta = 4.8 \text{ N}.$$

Analogamente la proiezione lungo la direzione tangente alla superficie del cilindro fornisce:

$$f_a - \frac{M}{2}g \sin \theta = -\frac{M}{4}g \sin \theta$$

e dunque

$$f_a = \frac{M}{4}g \sin \theta = 0.43 N .$$

d. La massa non striscia e rimane solidale con il cilindro se:

$$|f_a| \leq \mu_s N$$

che, con le espressioni per f_a e per N trovate precedentemente diviene:

$$\frac{M}{4}g \sin \theta \leq \mu_s \frac{Mg}{2}(2 \cos \theta - 1)$$

$$\sin \theta \leq \mu_s(4 \cos \theta - 2)$$

Vale quindi la relazione

$$\sin \theta_{max} = \mu_s(4 \cos \theta_{max} - 2) .$$

Per determinare l'angolo massimo eleviamo al quadrato questa espressione e definiamo

$$x = \cos \theta_{max}$$

risulta pertanto

$$1 - x^2 = 16\mu_s^2 x^2 - 16\mu_s^2 x + 4\mu_s^2$$

che risolta rispetto a x fornisce

$$x = \frac{8\mu_s^2 \pm \sqrt{64\mu_s^4 - (4\mu_s^2 - 1)(16\mu_s^2 + 1)}}{16\mu_s^2 + 1} .$$

Numericamente risultano le due soluzioni

$$\theta_{max} = 28^\circ \text{ e } \theta_{max} = 107^\circ$$

di cui la prima e' quella fisicamente accettabile.