Soluzioni

Esercizio 1.

All'equilibrio la forza elastica, la forza peso e la reazione vincolare del piano si bilanciano:

$$\vec{F}_{el} + \vec{P} + \vec{R}_n = 0 \quad (1)$$

Se la massa si trova in A, proiettando lungo la direzione parallela al piano si trova:

$$k_0 a \cos \theta - mg \sin \theta = 0 \quad (2)$$

da cui si ricava:

$$k_0 = \frac{mg}{a} \tan \theta = \frac{mg}{2a} \quad (3)$$

$$k_0 = 0.78 \text{ N/m (compito A)} \quad (4)$$

$$k_0 = 2.10 \text{ N/m (compito B)} .$$

2) Dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$U_0 + \frac{1}{2}k_0 a^2 = E(A) = E(C) = U_0 + m_* g(a \tan \theta) + \frac{1}{2}k_0(a \tan \theta)^2 \quad (5)$$

da cui si ricava:

$$m_* = \frac{k_0 a}{2g} \frac{1 - \tan^2 \theta}{\tan \theta} = \frac{3}{8}m \quad (6)$$

$$m_* = 30 \text{ g (compito A)} \quad (7)$$

$$m_* = 56 \text{ g (compito B)} . \quad (8)$$

3) Da considerazione trigonometriche si ricava $BM = a/2\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$ e $MH = a/2 \tan \theta$, dove MH è la quota del punto M rispetto alla retta orizzontale AB. La differenza di potenziale (dovuto alla forza gravitazionale ed elastica) tra il punto M e il punto A è dunque:

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(M) - U(A) = \frac{1}{2}k_0 BM^2 - \frac{1}{2}k_0 a^2 + m_* g MH \\ &= \frac{1}{4}m_* g a - \frac{11}{32}k_0 a^2 = -\frac{5}{64}m g a \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta U = -3.1 \times 10^{-2} \text{ Joule (compito A)} \quad (10)$$

$$\Delta U = -4.0 \times 10^{-2} \text{ Joule (compito B)} .$$

4) Dalla conservazione dell'energia meccanica possiamo ricavare la velocità della massa quando è in M:

$$\frac{1}{2}m_*v_M^2 + U(M) = E(M) = E(A) = U(A) \quad (11)$$

da cui segue:

$$v_M = \sqrt{-\frac{2}{m_*}\Delta U} = \sqrt{\frac{11}{16}\frac{k_0a^2}{m_*} - \frac{ag}{2}} = \sqrt{\frac{5}{12}ag} \quad (12)$$

$$v_M = 1.43 \text{ m/s (compito A)} \quad (13)$$

$$v_M = 1.20 \text{ m/s (compito B)} . \quad (14)$$

L'impulso ceduto alla massa è dunque $\vec{Q} = Q \hat{u}_{\parallel}$, dove $\hat{u}_{\parallel}$ è il versore parallelo al piano con verso positivo verso l'alto. Il suo modulo è

$$Q = m_*v_M = \frac{3}{8}m\sqrt{\frac{5}{12}ag} \quad (15)$$

$$Q = 4.3 \times 10^{-2} \text{ N s (compito A)} \quad (16)$$

$$Q = 6.7 \times 10^{-2} \text{ N s (compito B)}$$

Le forze che forniscono l'impulso alla massa sono la forza elastica e la forza peso, le uniche ad avere una proiezione non nulla lungo il piano.

Esercizio 2.

1) Scriviamo le equazioni di Newton per le due masse. Se x è l'allungamento della molla (abbiamo scelto un sistema di riferimento con origine nella posizione di riposo della molla), abbiamo

$$M_1a_1 = -kx + T, \quad M_2a_2 = -T + F. \quad (17)$$

Se la corda rimane sempre tesa, $a_1 = a_2 = a$, per cui eliminando T abbiamo

$$(M_1 + M_2)a = -kx + F.$$

Questa è l'equazione di un moto armonico con pulsazione

$$\omega^2 = \frac{k}{M_1 + M_2}$$

e posizione di equilibrio

$$x_{\text{eq}} = F/k.$$

La soluzione generale è

$$x(t) = x_{\text{eq}} + A \cos(\omega t + \phi).$$

Imponiamo le condizioni iniziali. Dato che il sistema al tempo $t = 0$ è fermo

$$v(t = 0) = -A\omega \sin \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0$$

Si ha poi $x(t = 0) = -\Delta_0$ per cui

$$-\Delta_0 = x_{\text{eq}} + A \quad \Rightarrow \quad A = -x_{\text{eq}} - \Delta_0$$

Quindi abbiamo per il periodo e l'ampiezza

$$T = 2\pi\sqrt{(M_1 + M_2)/k}, \quad |A| = \Delta_0 + F/k.$$

L'ampiezza poteva anche essere calcolata senza risolvere esplicitamente l'equazione del moto. Dato che la massa M_1 parte ferma in $x = -\Delta_0$ e si trova all'equilibrio quando $x = x_{\text{eq}}$, l'ampiezza è semplicemente data da

$$\text{Ampiezza} = x_{\text{eq}} - (-\Delta_0) = F/k + \Delta_0.$$

Numericamente abbiamo (Compito A)

$$\omega = \sqrt{k/3M_1} = 1.50 \text{ s}^{-1}, \quad T = 2\pi\sqrt{3M_1/k} = 4.18 \text{ s}, \quad \text{Amp} = 10.0 \text{ cm},$$

e

$$\omega = \sqrt{k/5M_2} = 10.0 \text{ s}^{-1}, \quad T = 2\pi\sqrt{5M_2/k} = 0.628 \text{ s}, \quad \text{Amp} = 6.0 \text{ cm}.$$

2) La tensione della corda può essere calcolata dalle equazioni di Newton. Dato che $M_2 a = F - T$ abbiamo

$$T = F - M_2 a.$$

L'accelerazione segue dalla legge oraria:

$$a = -A\omega^2 \cos \omega t = -\frac{Ak}{M_1 + M_2} \cos \omega t$$

Quindi

$$T = F + \frac{M_2 Ak}{M_1 + M_2} \cos \omega t = F - \frac{M_2}{M_1 + M_2} (F + k\Delta_0) \cos \omega t$$

Il valore minimo lo si ottiene quando $\cos \omega t = 1$, cioè nel momento di massima compressione della molla. Quindi

$$T_{\text{min}} = F - \frac{M_2}{M_1 + M_2} (F + k\Delta_0) = \frac{1}{M_1 + M_2} (M_1 F - M_2 k \Delta_0). \quad (18)$$

Questa espressione poteva essere ricavata senza utilizzare la legge oraria. Infatti, eliminando l'accelerazione delle equazioni di Newton abbiamo

$$\frac{T - kx}{M_1} = \frac{F - T}{M_2},$$

che risulta fornisce

$$T = \frac{M_1 F + M_2 k x}{M_1 + M_2}.$$

Il valore minimo di T si ottiene evidentemente per il valore minimo di x , ossia per $x = -\Delta_0$. Riotteniamo quindi il precedente risultato. Numericamente abbiamo (compito A)

$$T_{\min} = \frac{1}{3}(F - 2k\Delta_0) = 0.0117 \text{ N},$$

e (compito B)

$$T_{\min} = \frac{1}{5}(4F - k\Delta_0) = 4.81 \text{ N}.$$

3) Si può utilizzare qui la formula (18) con $\Delta_{\max} = \Delta$. Risulta $T_{\min} > 0$ solo se $\Delta < \Delta_{\max}$ con $M_1 F - M_2 k \Delta_{\max} = 0$, ossia

$$\Delta_{\max} = \frac{M_1 F}{M_2 k}.$$

Alternativamente si poteva ragionare in modo diretto, notando che a) il caso limite corrisponde a $T = 0$ e b) il valore minimo della tensione si ottiene per $x = -\Delta$. Sostituendo nelle equazioni (17) si ottiene

$$M_1 a = k \Delta_{\max} \quad M_2 a = F. \quad (19)$$

Eliminando l'accelerazione si ottiene

$$\frac{k \Delta_{\max}}{M_1} = \frac{F}{M_2}, \quad (20)$$

che fornisce lo stesso risultato. Numericamente abbiamo (compito A)

$$\Delta_{\max} = \frac{F}{2k} = 4.0 \text{ cm},$$

e (compito B)

$$\Delta_{\max} = \frac{4F}{k} = 10.0 \text{ cm}.$$

Esercizio 3: Identifichiamo le forze su ciascuna massa. Sul cilindro agisce una coppia di forze di momento τ , la forza F_s di attrito statico necessaria per il rotolamento perfetto, la tensione T della corda, la forza peso Mg e la reazione normale del piano. Ai fini del problema non è necessario definire correttamente il verso di F_s . Tuttavia è abbastanza ovvio che, se il corpo sale verso l'alto, F_s deve essere diretta verso l'alto, dato che la coppia ha forza totale nulla e le altre forze sono dirette verso il basso. Assumiamo quindi che F_s sia diretta verso l'alto. Le due equazioni cardinali diventano (assumendo l'asse x orientato lungo il piano inclinato verso l'alto e $\omega > 0$ per rotazioni orarie)

$$\begin{aligned} Ma &= F_s - T - Mg \sin \theta \\ I\alpha &= -F_s R + \tau \quad I = \frac{1}{2} MR^2. \end{aligned}$$

Si noti che, sebbene non detto esplicitamente nel testo, la coppia deve far girare il cilindro in senso orario, altrimenti il cilindro non salirebbe. Utilizzando $\alpha = a/R$ otteniamo

$$F_s = \frac{\tau}{R} - \frac{1}{2}Ma.$$

Sostituendo nella prima equazione cardinale otteniamo

$$\frac{3}{2}Ma = \frac{\tau}{R} - T - Mg \sin \theta. \quad (21)$$

Questa equazione poteva essere ottenuta direttamente prendendo come polo il punto di contatto tra cilindro e piano inclinato, il che permetteva di non considerare la forza di attrito. Dato che τ non dipende dal punto di applicazione abbiamo

$$I_C \alpha = \tau - TR - MgR \sin \theta,$$

dove I_C è il momento di inerzia rispetto al punto di contatto che può essere calcolato con il teorema di Huygens-Steiner,

$$I_C = I_{CM} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

Sostituendo tale espressione nell'equazione precedente ed utilizzando $\alpha = a/R$, si riottiene (21). Consideriamo ora la seconda massa. L'equazione di Newton è

$$ma = T - mg \sin \theta. \quad (22)$$

Sommando le due equazioni (21) e (22) al fine di eliminare T , troviamo

$$(m + 3M/2)a = \tau/R - (m + M)g \sin \theta$$

che fornisce l'accelerazione. Questa equazione si poteva ricavare anche utilizzando la conservazione dell'energia. Teniamo conto che: 1) il lavoro totale della coppia di tensioni applicate ai due corpi è nullo dato che il filo è inestensibile e sempre teso; 2) la forza di attrito statico che agisce sul cilindro non fa lavoro non essendovi strisciamento. Quindi l'energia totale si conserva. Dato che τ è costante, possiamo associare ad esso una energia potenziale $-\tau\theta$, dove θ rappresenta l'angolo di rotazione oraria del cilindro intorno al suo asse. Preso un sistema di riferimento con asse x parallelo al piano inclinato, abbiamo

$$E = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + mgx_m \sin \theta + Mgx_M \sin \theta - \tau\theta.$$

Dato che il filo è teso ed inestensibile $v_m = v_M = v$, mentre la condizione di rotolamento perfetto implica $v = \omega R$. Quindi

$$E = \frac{1}{2}(m + 3M/2)v^2 + mgx_m \sin \theta + Mgx_M \sin \theta - \tau\theta.$$

Dato che E non dipende dal tempo, derivando rispetto a t abbiamo

$$0 = (m + 3M/2)va + mgv \sin \theta + Mgv \sin \theta - \tau\omega.$$

Dividendo per v ed utilizzando $\omega/v = 1/R$ abbiamo

$$0 = (m + 3M/2)a + mg \sin \theta + Mg \sin \theta - \tau/R,$$

che fornisce la stessa espressione per a .

1) Se il corpo si muove con velocità costante, abbiamo $a = 0$. Dall'equazione precedente possiamo calcolare θ in funzione di τ_0 e viceversa:

$$\sin \theta = \frac{\tau_0}{(m + M)gR},$$

$$\tau_0 = (m + M)gR \sin \theta.$$

Quindi otteniamo (compito A)

$$\theta = 5.5^\circ = 5^\circ 30'$$

e (compito B)

$$\tau_0 = 3.13 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

2a) Otteniamo

$$a = \frac{\tau/R - (m + M)g \sin \theta}{m + 3M/2}.$$

Per il calcolo numerico può essere utile riscriverla come

$$a = \frac{\tau - \tau_0}{R(m + 3M/2)}.$$

Otteniamo numericamente

$$a = 1.50 \text{ m/s}^2 \quad (\text{A}) \qquad a = 2.61 \text{ m/s}^2 \quad (\text{B})$$

2b) Utilizzando (22) otteniamo

$$T = ma + mg \sin \theta.$$

Otteniamo numericamente

$$T = 9.54 \text{ N} \quad (\text{A}) \qquad T = 12.5 \text{ N} \quad (\text{B})$$

2c) Abbiamo

$$F_s = \frac{\tau}{R} - \frac{1}{2}Ma.$$

$$F_s = 20.1 \text{ N} \quad (\text{A}) \qquad F_s = 29.1 \text{ N} \quad (\text{A})$$

Esercizio 4: a) E' sufficiente bilanciare i momenti delle forze rispetto all'asse. Le due forze rilevanti sono la forza della molla e la forza peso dell'asta. Quindi

$$kx_m R = m_A \frac{L}{2} g \cos \alpha,$$

da cui (compito A)

$$x_m = \frac{m_A g L \cos \alpha}{2kR},$$

oppure

$$k = \frac{m_A g L \cos \alpha}{2R x_m}.$$

Numericamente troviamo:

$$x_m = 2.9 \text{ cm} \quad (A), \quad k = 241 \text{ N/m} \quad (B).$$

b) L'asta ha velocità angolare nulla quando è orizzontale. Dato che la molla si allunga di $l = R\alpha$ (α qui deve essere espresso in radianti) abbiamo, utilizzando la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} k x_m^2 + m_A g \frac{L}{2} \sin \alpha + mgL \sin \alpha = \frac{1}{2} k (x_m + l)^2,$$

da cui

$$m = \frac{1}{gL \sin \alpha} \left(\frac{1}{2} k (x_m + l)^2 - \frac{1}{2} k x_m^2 - m_A g \frac{L}{2} \sin \alpha \right).$$

Ai fini di semplificare il calcolo numerico può essere utile semplificare questa espressione riscrivendola come

$$m = \frac{1}{2gL \sin \alpha} (2klx_m + kl^2 - m_A g L \sin \alpha).$$

Un'ulteriore semplificazione può essere ottenuta utilizzando l'espressione per x_m ricavata al punto precedente:

$$m = \frac{kl^2}{2gL \sin \alpha} - \frac{m_A}{2} (1 - \alpha \cot \alpha)$$

Numericamente otteniamo (compito A)

$$l = \frac{\pi R}{3} = 10.4 \text{ cm} \quad m = 376 \text{ g},$$

e (compito B)

$$l = \frac{\pi R}{3} = 12.7 \text{ cm} \quad m = 166 \text{ g}.$$

c) Quando l'asta è orizzontale la II equazione cardinale fornisce (α_{rot} è l'accelerazione angolare)

$$I_{\text{tot}} \alpha_{\text{rot}} = -m_A g \frac{L}{2} - mgL + k(x_m + l)R$$

con

$$I_{\text{tot}} = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{3} m_A L^2 + mL^2$$

da cui

$$\alpha_{\text{rot}} = \frac{-m_A g \frac{L}{2} - mgL + k(x_m + l)R}{I_{\text{tot}}}.$$

La massa m compie un moto circolare. Quindi l'accelerazione ha una componente tangenziale pari a $\alpha_{\text{rot}}L$ ed una componente centripeta pari a ω^2L . Quando l'asta è orizzontale $\omega = 0$, per cui abbiamo

$$a = L\alpha_{\text{rot}}.$$

Numericamente abbiamo (compito A)

$$I_{\text{tot}} = 0.191 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad \alpha_{\text{rot}} = 8.02 \text{ rad/s}^2, \quad a = 3.77 \text{ m/s}^2,$$

e (compito B)

$$I_{\text{tot}} = 0.243 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad \alpha_{\text{rot}} = 4.50 \text{ rad/s}^2, \quad a = 2.34 \text{ m/s}^2,$$

d) Per calcolare la forza vincolare $\mathbf{F}_v$ utilizzeremo la I equazione cardinale. Le forze esterne sono, oltre alla forza vincolare, la forza della molla $\mathbf{F}_m$ e la forza peso del sistema $\mathbf{P}$, date da (asse x orizzontale orientato verso destra, asse y verticale diretto verso l'alto)

$$\mathbf{F}_m = (-k(x_m + l), 0), \quad \mathbf{P} = (0, -(m + m_A + M)g).$$

Il centro di massa del sistema compie un moto circolare. Quando l'asta è orizzontale, la sua velocità è nulla, per cui vi è la sola componente tangenziale:

$$\mathbf{a}_C = (0, \alpha_{\text{rot}}d_{CM})$$

dove

$$d_{CM} = \frac{m_A L/2 + mL}{m + m_A + M}$$

Quindi

$$M_{\text{tot}}\mathbf{a}_C = (0, \alpha_{\text{rot}}(m_A L/2 + mL)).$$

Se $\mathbf{F}_v = (F_x, F_y)$ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= -k(x_m + l) + F_x \\ \alpha_{\text{rot}}(m_A L/2 + mL) &= -(m + m_A + M)g + F_y, \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} F_x &= k(x_m + l), \\ F_y &= \alpha_{\text{rot}}(m_A L/2 + mL) + (m + m_A + M)g. \end{aligned} \quad (23)$$

Numericamente otteniamo (compito A)

$$F_x = 59 \text{ N}, \quad F_y = 69 \text{ N}, \quad |F| = 91 \text{ N}, \quad \theta_F = \arctan F_y/F_x = 50^\circ,$$

e (compito B)

$$F_x = 45 \text{ N}, \quad F_y = 117 \text{ N}, \quad |F| = 126 \text{ N}, \quad \theta_F = \arctan F_y/F_x = 69^\circ.$$