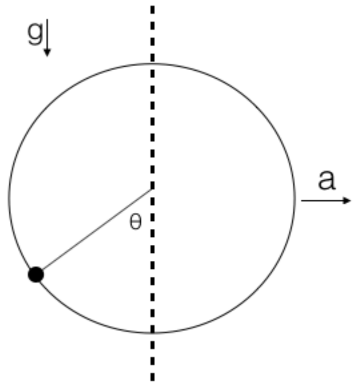
Corso Meccanica – Anno Accademico 2017/18 – Scritto del 10/09/2018

Esercizio n. 1

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi lungo una guida circolare liscia di raggio R e massa M giacente su un piano verticale. La guida è accelerata orizzontalmente con accelerazione costante a parallela al piano della guida, sotto l'azione di una forza F.

Si calcoli:
1. il punto di equilibrio θ_0 del punto materiale nel sistema di riferimento della guida.
2. Il modulo della forza F necessario ad avere accelerazione a quando il punto materiale è in θ_0 fermo rispetto alla guida.
3. La reazione vincolare della guida nelle stesse condizioni del punto 2.
4. la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno a θ_0.

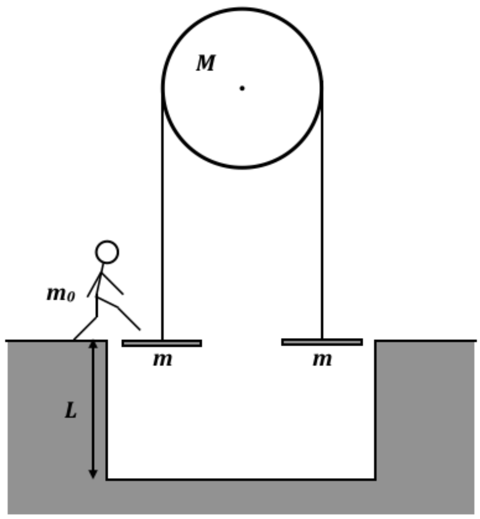


[$\boldsymbol{a}$ = 2.0 m/s^2 ; $\boldsymbol{R}$ = 0.40 m ; $\boldsymbol{M}$ = 1.0 kg ; $\boldsymbol{m}$ = 0.10 kg]

Esercizio n. 2

Nel dispositivo in figura la puleggia è costituita da un cilindro cavo di spessore trascurabile e di massa M. Due piattaforme, di massa m, sono legate tra di loro tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile avvolta attorno alla puleggia. La fune non può scivolare sulla superficie della puleggia. Un uomo di massa m_0 sale molto lentamente (con velocità verticale e orizzontale praticamente nulla) su una delle due piattaforme. Di conseguenza il sistema, inizialmente fermo, si mette in movimento.

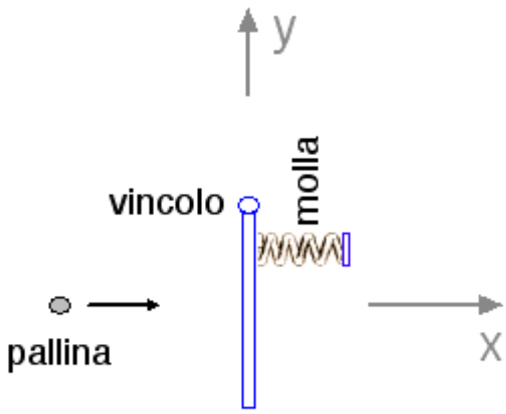
Si calcoli:
1. l'accelerazione dell'uomo durante il moto;
2. le tensioni della fune nei punti in cui è attaccato a ciascuna delle due piattaforme;
3. il valore della massa m se si vuole che la velocità dell'uomo, quando la quota della piattaforma è variata di L, sia v_0.



[$\boldsymbol{M}$ = 1600 kg ; $\boldsymbol{m_0}$ = 90 kg ; $\boldsymbol{m}$ = 20 kg ; $\boldsymbol{L}$ = 10 m; $\boldsymbol{v_0}$ = 2.0 m/s]

Esercizio n. 3

Un'asta di lunghezza L e massa M può ruotare senza attrito su di un piano xy orizzontale attorno ad un asse fisso posto in una sua estremità. A distanza di L/5 dal vincolo l'asta è attaccata a una molla di costante elastica k, fissata al piano all'altra estremità; la molla è a riposo quando l'asta è nella posizione iniziale, mostrata in figura (vista dall'alto). Una pallina di stucco puntiforme viene lanciata ortogonalmente all'asta ferma e al tempo $t = 0$ la colpisce esattamente al centro, rimanendovi attaccata. La massa della pallina è m e la sua velocità è v.



Si calcoli:

1) la velocità angolare dell'asta subito dopo l'impatto della pallina;
2) l'impulso fornito dal vincolo nell'impatto;
3) la pulsazione delle piccole oscillazioni dell'asta dopo l'impatto;
4) l'angolo massimo raggiunto dall'asta nelle piccole oscillazioni.

(per le domande 3) e 4) si assuma che la molla sia sempre ortogonale all'asta durante il moto)

[$\boldsymbol{L}$ = 1.5 m ; $\boldsymbol{M}$ = 0.15 kg ; $\boldsymbol{k}$ = 64 N/m ; $\boldsymbol{m}$ = 0.025 kg; $\boldsymbol{v}$ = 4.0 m/s]

Soluzioni

Esercizio n. 1

1) La combinazione delle forze lungo la tangente in funzione dell'angolo porta alla classica soluzione

$$tan(\theta_0) = \frac{a}{g}, \theta_0 = 0.201 rad$$

2) Quando il punto materiale è in quiete rispetto alla guida le due masse si sommano banalmente

$$(M + m)a = F = 2.2N$$

3) La reazione vincolare è data dai contributi normali alla guida della forza peso e della forza apparente

$$m(gcos\theta_0 + asin\theta_0) = 1N$$

4) Per $\theta = \theta_0$ la forza totale applicata al punto materiale assume il valore minimo. Chiamando $\delta = \theta - \theta_0$ un'eventuale spostamento angolare rispetto alla posizione di equilibrio possiamo calcolare la forza di richiamo $\vec{F}(\delta)$ che agirebbe, se spostato dall'equilibrio, sul punto materiale: ovviamente, chiamando s lo spostamento lineare del punto materiale ed $\ddot{\vec{s}} = R\ddot{\delta}$ la sua accelerazione, si avrebbe, proiettando lungo la tangente alla guida $F(\delta) = mR\ddot{\delta}$=.
Con lo sviluppo in serie di Taylor attorno alla posizione di equilibrio ($\theta = \theta_0 \ \rightarrow \ \delta = 0$) si ottiene, al primo ordine:

$$F(\theta - \theta_0) \simeq -mgsin\theta_0 + macos\theta_0 - (mgcos\theta_0 + masin\theta_0)(\theta - \theta_0) + O((\theta - \theta_0)^2)$$

dunque

$$-m(gcos\theta_0 + asin\theta_0) \cdot \delta = mR\ddot{\delta}$$

ovvero il moto del punto materiale è un'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{gcos\theta_0 + asin\theta_0}{R}} = 5\, rad/s.$$

Esercizio n. 2

1) Risolviamo usando il secondo principio della dinamica per le due masse e la seconda equazione cardinale della dinamica per la puleggia (polo nel centro di massa di essa)

$$(m + m_0)g - \tau_1 = (m + m_0)a_1$$
$$mg - \tau_2 = ma_2$$
$$R\tau_1 - R\tau_2 = I\alpha = MR^2\alpha$$

Imponendo $a = a_1 = -a_2$ e $\alpha = a_1/R$ e sommando le tre equazioni per rimuovere le tensioni, si ottiene:

$$m_0 g = (2m + m_0 + M)a$$

da cui

$$a = g\frac{m_0}{2m + m_0 + M} = 0.510\ m/s^2$$

2) Le tensioni si possono ricavare dalle prime due equazioni in 1), cioè

$$(m + m_0)g - \tau_1 = (m + m_0)a$$
$$mg - \tau_2 = -ma$$

che danno

$$\tau_1 = (m + m_0)(g - a) = 1020\ N$$
$$\tau_2 = m(g + a) = 206\ N$$

3) Si tratta di un moto uniformemente accelerato. Partendo da fermo, la velocità e la quota sono legati dalla relazione

$$v_0 = \sqrt{2aL}$$

da cui

$$a = \frac{{v_0}^2}{2L}$$

Usando l'espressione di *a* ricavata nel punto 1) otteniamo

$$g\frac{m_0}{2\bar{m} + m_0 + M} = \frac{{v_0}^2}{2L}$$

e quindi

$$\bar{m} = -\frac{m_0 + M}{2} + \frac{m_0 gL}{{v_0}^2} = 1360\ kg$$

Esercizio n. 3

1. Nell'impatto la molla non conta perché la sua forza non è impulsiva: si conserva il momento angolare totale rispetto al vincolo. Prima dell'impatto il momento angolare totale è mvL/2. Subito dopo l'urto il momento d'inerzia dell'asta col proiettile conficcato è
   $I = (ML^2/3 + mL^2/4) = (M/3 + m/4)L^2$. Se ω è la velocità angolare di asta+proiettile subito dopo l'urto, dalla conservazione del momento angolare $mvL/2 = I\omega$ si ha
   $\omega = mvL/(2I) = 6mv/[(4M + 3m)L] = 0.59\ s^{-1}$.
2. La quantità di moto totale prima dell'urto è mv; subito dopo l'urto è pari alla massa totale M+m per la velocità del centro di massa $v_c = \omega L/2 = 3mv/(4M + 3m)$. L'impulso fornito dal vincolo nell'impatto è:
   $J_R = (M + m)v_c - mv = -Mv/[3 + (4M/m)] = -mv/[4 + (3m/M)] = -mMv/(4M + 3m) = -2.2 \times 10^{-2}$ kg m s^{-1}: il vincolo assorbe parte della quantità di moto iniziale del sistema.
3. La forza della molla, per piccole oscillazioni, è $f = -kx = -k(L/5)\theta$ dove θ è l'angolo formato dall'asta con la propria posizione di equilibrio; il momento di tale forza rispetto al vincolo è $M = fL/5 = -k(L/5)^2\theta$. Dunque l'equazione differenziale per l'angolo è
   $I(d^2\theta/dt^2) = -k(L/5)^2\theta$. La pulsazione delle piccole oscillazioni, se I è il momento d'inerzia del sistema dopo l'impatto ottenuto al punto 1, è
   $\omega_{PO} = (L/5)\sqrt{(k/I)} = (2/5)\sqrt{[3k/(4M + 3m)]} = 6.7\ s^{-1}$
4. Se scegliamo t = 0 come momento dell'impatto, l'angolo oscilla nel tempo con legge
   $\theta(t) = \theta_{max}\sin(\omega_{PO}t)$; la velocità angolare è $d\theta/dt = \omega_{PO}\theta_{max}\cos(\omega_{PO}t)$, che a t = 0 vale $\omega_{PO}\theta_{max}$; essa deve uguagliare la velocità angolare subito dopo l'impatto, cioè il valore di ω ottenuto nella prima risposta. Da $\omega = \omega_{PO}\theta_{max}$ si ottiene l'angolo massimo $\theta_{max} = \omega/\omega_{PO} = (15mv/L)/\sqrt{[3k(4M + 3m)]} = 8.8 \times 10^{-2}$ rad.