Esame 3 Luglio 2024

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2023-2024

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
3 Luglio 2024

NOTA 1: $\boxed{\textbf{GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI}}$

$\boxed{\textbf{Es.1, Es.2 ed Es.3 su uno}}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\textbf{Es.4, Es.5 ed Es.6 sull'altro}}$

NOTA 2: **SCRIVERE IN $\boxed{\textbf{STAMPATELLO}}$ SU ENTRAMBI I FOGLI NOME, COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.**
Esempio "DAVID HILBERT, 23011862."

NOTA 3: **Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.**

Esercizio 1 (7 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2 \ln(x)}{(x^2+1)^2} dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{\ln(z^2-1)}{\sinh(z)\sqrt{z+2e^{i\frac{\pi}{3}}}} \,. \tag{2}$$

Calcolare l'integrale $\int_\gamma f(z)dz$ dove $\gamma = \frac{1}{2}e^{i\theta}$, con $0 \le \theta \le 2\pi$, dove per le funzioni polidrome consideriamo il ramo principale.

Esercizio 3 (3 pt)
Considerata la potenza complessa di un numero complesso

$$f(z) = z^c \quad z, c \in \mathbb{C} \,, \tag{3}$$

calcolare modulo e argomento di $(1+i)^{(1-i)}$, sul ramo principale della funzione.

Esercizio 4 (5 pt)
Data la regola di ricorrenza

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \,, \tag{4}$$

con condizioni iniziali $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e A reale, calcolare $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Esercizio 5 (5 pt)
Trovare la $f(x)$ soluzione dell'equazione

$$\int\int\int f(x_1)f(x_2)f(x_3)\delta(x-(x_1+x_2+x_3))\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = g_\lambda(x)\,, \tag{5}$$

ove

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\delta(x-n)\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{6}$$

Esercizio 6 (5 pt)
Trovare la soluzione $f(x,t)$ dell'equazione

$$\partial^2_{tt}f(x,t) = \partial^2_{xx}f(x,t) - \alpha f(x,t)\,, \tag{7}$$

con $\alpha > 0$, $x \in [-\pi,\pi]$ e condizioni iniziali

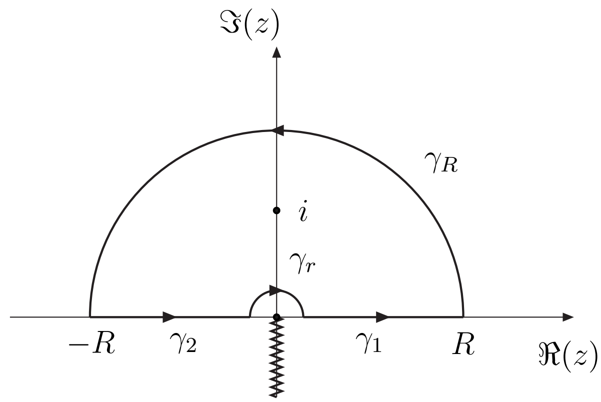
$$f(x,0) = (\cos x)^2 \ \ , \ \ \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin x\,. \tag{8}$$

Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione polidroma

$$f(z) = \frac{z^2 \ln(z)}{(z^2+1)^2}\,, \tag{9}$$

che ha due poli doppi in $z = \pm i$. Poniamo il taglio dovuto al logaritmo sul semiasse immaginario negativo e consideriamo il cammino in figura.



Per il teorema dei residui, si ha

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,i) = \frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}\,, \tag{10}$$

dove $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_r$ e dove

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2\ln(z)}{(z^2+i)^2}\right\} = \frac{\pi}{8} - \frac{i}{4}\,. \tag{11}$$

D'altra parte si ha:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} \frac{z^2\ln(z)}{(z^2+1)^2}dz \;=\; -\lim_{r\to 0}\int_0^\pi \frac{r^2 e^{2i\theta}(\ln r + i\theta)}{(r^2 e^{i2\theta}+1)^2}\, ire^{i\theta}\,d\theta = 0\,, \tag{12}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{z^2\ln(z)}{(z^2+1)}dz \;=\; \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{R^2 e^{2i\theta}(\ln(R) + i\theta)}{(R^2 e^{i2\theta}+1)^2}\, iRe^{i\theta a}\,d\theta = 0\,, \tag{13}$$

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{\gamma_1} \frac{z^2\ln(z)}{(z^2+1)}dz \;=\; \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_r^R \frac{x^2\ln(x)}{(x^2+1)^2}\,dx = I\,, \tag{14}$$

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{\gamma_2} \frac{z^2\ln(z)}{(z^2+1)^2}dz \;=\; \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_R^r \frac{x^2(\ln(x)+i\pi)}{(x^2+1)^2}\,e^{i\pi}dx = I + i\pi\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx\,. \tag{15}$$

In totale, quindi:

$$2I + i\pi\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}\,, \tag{16}$$

ovvero:

$$I = \frac{\pi}{4} \,. \tag{17}$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ è una funzione polidroma. Ciò è dovuto alla presenza del logaritmo e della radice. Il logaritmo ha due punti di diramazione al finito, in $z = \pm 1$ e un punto di diramazione doppio nel punto all'infinito. Quindi poniamo un taglio da $z = -1$ al punto all'infinito lungo il semiasse reale negativo e uno da $z = 1$ al punto all'infinito sul semiasse reale positivo. La radice ha un punto di diramazione al finito in $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$ e uno nel punto all'infinito. Quindi un altro taglio congiunge $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$ col punto all'infinito. Inoltre $f(z)$ ha poli semplici in $z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, e il punto all'infinito è anche un punto di singolarità essenziale.

Per il teorema dei residui, abbiamo

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,0) = -\sqrt{2}\pi^2 e^{-i\frac{\pi}{6}} \,, \tag{18}$$

dove

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{\ln\left(z^2-1\right)}{\sqrt{z+2e^{i\frac{\pi}{3}}}} = \frac{i\pi}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}} \,. \tag{19}$$

Soluzione Es. 3

Abbiamo che

$$z^c = e^{c\ln(z)} \,, \tag{20}$$

dove $\ln(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$, con $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$. Quindi

$$\begin{aligned}
(1+i)^{(1-i)} &= \exp\left\{(1-i)\left[\ln\left(|1+i|\right) + i\mathrm{Arg}(1+i)\right]\right\} , && (21)\\
&= \exp\left\{(1-i)\left[\frac{1}{2}\ln(2) + i\frac{\pi}{4}\right]\right\} , && (22)\\
&= \exp\left\{\left[\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{4}\right] + i\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)\right]\right\} . && (23)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
|(1+i)^{(1-i)}| &= \exp\left\{\left[\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{4}\right]\right\} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \,, && (24)\\
\mathrm{Arg}\left((1+i)^{(1-i)}\right) &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) \,. && (25)
\end{aligned}$$

Soluzione Es. 4

Un modo semplice è notare che per $S_n = x_n + y_n$ e $D_n = x_n - y_n$ si ha

$$S_{n+1} = \frac{5}{6}S_n + 2A \;\;,\;\; D_{n+1} = \frac{1}{6}D_n \;,$$

si ottiene facilmente

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2A}{1-5/6} = 12A \ , \ \lim_{n\to\infty} D_n = 0 \ \to \ \lim_{n\to\infty} x_n = 6A \ .$$

Un altro modo, più meccanico, è usando gli autovalori $\lambda_1 = 5/6$, $\lambda_2 = 1/5$ e gli autovettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ della matrice $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \ .$$

Scrivendo

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = a_n \mathbf{v}_1 + b_n \mathbf{v}_2$$

si ha

$$a_{n+1} = \frac{5}{6} a_n + A \ , \ b_{n+1} = \frac{1}{6} b_n \ ,$$

etc. etc.
Notare che il risultato non dipende dalle condizioni iniziali perché gli autovalori sono, in modulo, minori di 1.

Soluzione Es. 5

Usando il teorema di convoluzione si ha

$$(\sqrt{2})^2 \hat{f}(k)^3 = \hat{g}_\lambda(k)$$

$$\hat{g}_\lambda(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} g_\lambda(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-ikn} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{-ik}\right)^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\lambda(e^{-ik}-1)} \ .$$

Quindi

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\lambda}{3}(e^{-ik}-1)} = \hat{g}_{\frac{\lambda}{3}}(k)$$

invertendo si ha

$$f(x) = g_{\frac{\lambda}{3}}(x) = e^{-\frac{\lambda}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{3^n n!} \delta(x-n) \ .$$

Soluzione Es. 6

Sviluppando in serie di Fourier complessa

$$f(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) e^{inx}$$

si ha

$$\frac{d^2}{dt^2} f_n = -(n^2 + \alpha) f_n \, .$$

Abbiamo quindi oscillatori armonici con frequenze $\omega_n = \sqrt{n^2 + \alpha}$, la soluzione è elementare:

$$f_n(t) = f_n(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{f}_n(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \, .$$

I coefficienti $f_n(0)$ e $\dot{f}_n(0)$ si ottengono facilmente dalla condizione iniziale, scrivendo

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{4}\Big(e^{i2x} + e^{-i2x}\Big) + \frac{1}{2} \ , \ \sin x = \frac{1}{2i}\Big(e^{ix} - e^{-ix}\Big) \, ,$$

abbiamo che gli unici n coinvolti sono $n = \pm 1$, $n = 0$ ed $n = \pm 2$ con

$$f_0(0) = \frac{1}{2} \ , \ f_2(0) = f_{-2} = \frac{1}{4} \ , \ f_1(0) = f_{-1}(0) = 0$$

$$\dot{f}_0(0) = \dot{f}_2(0) = \dot{f}_{-2} = 0 \ , \ \dot{f}_1(0) = -\dot{f}_{-1}(0) = \frac{1}{2i} \, ,$$

Mettendo insieme tutti i termini, ed usando la formula di Eulero, si ha

$$f(x,t) = \frac{1}{2} \cos(2x) \cos(\omega_2 t) + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_1} \sin(x) \sin(\omega_1 t) \, .$$

Ovviamente si può risolvere il problema usando la serie trigonometrica

$$f(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1} \Big(a_n(t) \cos(nx) + b_n(t) \sin(nx) \Big)$$

scrivendo le equazioni per $a_n(t)$ e $b_n(t)$ etc.