# La torre di Hanoy

Marco Bonvini *

21 dicembre 2008

## 1 La ricorsione

È evidente che per spostare una torre composta di $N = 1$ pezzi è necessario un solo passaggio. Detta $f(N)$ il numero di passi necessari a spostare una torre alta $N$ si ha dunque

$$f(1) = 1 \ . \tag{1}$$

Per spostare una torre di $N + 1$ pezzi è necessario spostare gli $N$ pezzi più piccoli (in $f(N)$ passi), spostare quindi quello grosso, e spostarvi sopra ancora gli $N$ pezzi più piccoli (sempre in $f(N)$ passi); si ha quindi la formula di ricorsione

$$f(N + 1) = 2\, f(N) + 1 \ . \tag{2}$$

Per risolverla osserviamo che se il $+1$ non fosse presente la souzione sarebbe banale:

$$f_0(N + 1) = 2\, f_0(N) \qquad \Rightarrow \qquad f_0(N) = k\, 2^N \ ; \tag{3}$$

il valore di $k$ viene fissato dalla condizione iniziale. Nel caso (2) si può provare una soluzione del tipo

$$f(N) = k\, 2^N + a \ ,$$

e sostituendo si trova, per $a$,

$$a = 2a + 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = -1 \ .$$

La condizione (1) permette di fissare $k$:

$$k\, 2^1 - 1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad k = 1 \ .$$

Si ha quindi, infine

$$\boxed{f(N) = 2^N - 1} \ . \tag{4}$$

*Marco.Bonvini@scienze.studenti.unige.it

Per quanto riguarda l'unicità della soluzione, potrebbero venire dei dubbi (in fin dei conti la (3) si è risolta in maniera euristica). È sufficiente pensare che la ricorsione, fissato il punto di inizio, fissa univocamente tutta la sequenza. È quindi evidente che se si trova una soluzione della ricorsione che soddifa la condizione iniziale, allora essa è per forza unica.

*Creato con* $\LaTeX\,2_\varepsilon$.