Prodotto scalare, covarianza e controvarianza, tensore metrico

Marco Bonvini

29 settembre 2005

1 Prodotto scalare

Sia V spazio lineare su $\mathbb{R}$; dati $\underline{u}, \underline{v} \in V$ il loro prodotto scalare, indicato con $(\underline{u}\,,\,\underline{v})$, è:

- *bilineare*; dato $\underline{w} \in V$
$$(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}\,,\,\underline{w}) = \alpha(\underline{u}\,,\,\underline{w}) + \beta(\underline{v}\,,\,\underline{w})\ ,$$
$$(\underline{u}\,,\,\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}) = \alpha(\underline{u}\,,\,\underline{v}) + \beta(\underline{u}\,,\,\underline{w})\ ;$$

- *simmetrico*
$$(\underline{u}\,,\,\underline{v}) = (\underline{v}\,,\,\underline{u})\ ;$$

- *positivo*
$$(\underline{u}\,,\,\underline{u}) \geq 0\ , \qquad = 0 \ \Leftrightarrow\ \underline{u} = \underline{0}\ .$$

Sia $\{\underline{e}_k\}$ base di V, $k = 1, \ldots, n$, $n = \dim V$; allora i vettori di V si possono ottenere come combinazione lineare degli $\underline{e}_k$

$$\underline{u} = u^\alpha \underline{e}_\alpha \qquad (\text{somma su}\ \alpha = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

Le u^α vengono dette *componenti controvarianti* di $\underline{u}$ rispetto alla base $\{\underline{e}_k\}$.
Il prodotto scalare tra due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$, usando la Formula (1), si può scrivere

$$(\underline{u}\,,\,\underline{v}) = (u^\alpha \underline{e}_\alpha\,,\,\underline{v}) = u^\alpha(\underline{e}_\alpha\,,\,\underline{v}) = u^\alpha(\underline{e}_\alpha\,,\,v^\beta \underline{e}_\beta) = u^\alpha v^\beta(\underline{e}_\alpha\,,\,\underline{e}_\beta) \tag{2}$$

È naturale introdurre l'oggetto
$$g_{\alpha\beta} := (\underline{e}_\alpha\,,\,\underline{e}_\beta)\ , \tag{3}$$
detto *tensore metrico*.
Il fatto che $g_{\alpha\beta}$ sia un tensore è facilmente verificabile. Infatti, passando dalla base degli $\{\underline{e}_k\}$ ad una nuova base $\{\underline{e}'_k\}$, con la trasformazione $\underline{e}'_\alpha = A(\underline{e}_\alpha) = {A_\alpha}^\beta\, \underline{e}_\beta$, si ha per il nuovo tensore metrico

$$g'_{\alpha\beta} = (\underline{e}'_\alpha\,,\,\underline{e}'_\beta) = ({A_\alpha}^\gamma\, \underline{e}_\gamma\,,\,{A_\beta}^\zeta\, \underline{e}_\zeta) = {A_\alpha}^\gamma\, {A_\beta}^\zeta\, (\underline{e}_\gamma\,,\,\underline{e}_\zeta) = {A_\alpha}^\gamma\, {A_\beta}^\zeta\, g_{\gamma\zeta}\ ,$$

che corrisponde alla legge di trasformazione dei tensori.
Il tensore metrico $g_{\alpha\beta}$ gode delle seguenti proprietà:

- dipende unicamente dalla scelta della base;

- è *simmetrico* per costruzione, in quanto lo è il prodotto scalare:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \; ;$$

- è *invariante per rotazioni*, visto che il prodotto scalare dipende solo dalla posizione relativa dei vettori. Infatti una rotazione è ottenuta tramite un operatore lineare ortogonale R, che, per definizione, ha la proprietà

$$(R(\underline{u}) \, , \, R(\underline{v})) = (\underline{u} \, , \, \underline{v}) \; .$$

  Quindi applicando la trasformazione si ottiene per il nuovo tensore metrico $g'_{\alpha\beta}$

$$g'_{\alpha\beta} = (\underline{e}'_\alpha \, , \, \underline{e}'_\beta) = (R(\underline{e}_\alpha) \, , \, R(\underline{e}_\beta)) = (\underline{e}_\alpha \, , \, \underline{e}_\beta) = g_{\alpha\beta} \; ;$$

- in basi *ortonormali* gli unici prodotti non nulli della (3) sono quelli per $\alpha = \beta$, e sono unitari; quindi

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \; .$$

Si possono definire

$$v_\alpha := (\underline{e}_\alpha \, , \, \underline{v}) \tag{4}$$

dette le *componenti covarianti* di $\underline{v}$, che altro non sono che le proiezioni ortogonali di $\underline{v}$ sui vettori della base.
Dalla (2), per sostituzione al terzo membro, si ha

$$(\underline{u} \, , \, \underline{v}) = u^\alpha v_\alpha \; , \tag{5}$$

ma, sempre dalla (2), si ha che

$$(\underline{u} \, , \, \underline{v}) = u^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta} \; ;$$

Eguagliando i secondi membri di queste ultime due formule, ed eliminando il comune u^α, si ottiene la relazione [1]

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} \, v^\beta$$

cioè, il tensore metrico rappresenta il legame tra componenti controvarianti e covarianti. È da notare che in basi ortonormali le componenti covarianti e controvarianti coincidono: infatti in tali basi il tensore metrico $g_{\alpha\beta}$ corrisponde alla matrice identica, $\delta_{\alpha\beta}$, e quindi $\delta_{\alpha\beta} \, v^\beta = v_\alpha$. Tale è il motivo per cui con vettori cartesiani si sente parlare semplicemente di *componenti*.

Considero ora un tensore in componenti controvarianti $h^{\alpha\beta}$; per definizione esso è un oggetto le cui componenti si trasformano come il prodotto di due vettori controvarianti: $h^{\alpha\beta} = a^\alpha \, b^\beta$. In tale rappresentazione è lecito lavorare sulla posizione degli indici del tensore: per "abbassare" un indice uso il tensore metrico

$$g_{\gamma\alpha} \, h^{\alpha\beta} = g_{\gamma\alpha} \, a^\alpha \, b^\beta = a_\gamma \, b^\beta := h_\gamma{}^\beta \; .$$

Ora voglio conoscere cos'è $g^{\alpha\beta}$; abbasso gli indici per ottenere $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} \, g_{\beta\zeta} \, g^{\gamma\zeta} \; .$$

[1] A tale relazione si può giungere direttamente dalla (4) usando la (1):

$$v_\alpha = (\underline{e}_\alpha \, , \, \underline{v}) = (\underline{e}_\alpha \, , \, v^\beta \underline{e}_\beta) = v^\beta (\underline{e}_\alpha \, , \, \underline{e}_\beta) = v^\beta g_{\alpha\beta} \; .$$

Inoltre è valida l'identità

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}\,\delta_\beta{}^\gamma\ ,$$

che discende dal fatto che la $\delta_\beta{}^\gamma$ ha il solo effetto di cambiare il nome dell'indice su cui è sommato con quello dell'altro suo indice. Dalle ultime eguaglianze si trova

$$\delta_\beta{}^\gamma = g_{\beta\zeta}\,g^{\gamma\zeta}\ , \tag{6}$$

cioè $g^{\alpha\beta}$ è la matrice inversa di $g_{\alpha\beta}$; quindi

$$v^\alpha = g^{\alpha\beta}\,v_\beta\ .$$

Inoltre il secondo membro della (6) può essere letto come l'abbassamento del secondo indice di $g^{\gamma\zeta}$: quindi

$$\delta_\beta{}^\gamma = g_{\beta\zeta}\,g^{\gamma\zeta} = g^\gamma{}_\beta\ .$$

La (6) può essere letta altresì come l'innalzamento del secondo indice di $g_{\beta\zeta}$

$$\delta_\beta{}^\gamma = g_{\beta\zeta}\,g^{\gamma\zeta} = g_\beta{}^\gamma\ ,$$

da cui, eguagliando, si ottiene la relazione

$$\delta_\beta{}^\gamma = g^\gamma{}_\beta = g_\beta{}^\gamma$$

che discende dalla simmetria di g. Si può quindi pensare di trascurare quale sia l'indice alto e l'indice basso e scrivere semplicemente $\delta^\beta_\alpha = g^\beta_\alpha$ [2].
Si è trovata di fatto una importante proprietà del tensore metrico: esso, espresso in componenti miste, corrisponde alla matrice identità, cioè alla δ.
Di contro, per verifica, si può alzare o abbassare un indice di δ^α_β, ottenendo rispettivamente $g^{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta}$:

$$g^{\alpha\gamma}\,\delta^\beta_\gamma = g^{\alpha\beta}\ , \qquad g_{\alpha\gamma}\,\delta^\gamma_\beta = g_{\alpha\beta}\ .$$

2 Funzionali lineari

Sia $\widehat{\varphi} : V \to W$ un'applicazione lineare dallo spazio V allo spazio W. L'insieme di tali applicazioni $\widehat{\varphi}$ è spazio vettoriale rispetto all'usuale composizione di operatori: date due applicazioni $\widehat{\varphi}$ e $\widehat{\psi}$ dallo spazio V allo spazio W, essendo $\underline{v} \in V$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$(\alpha\widehat{\varphi} + \beta\widehat{\psi})(\underline{v}) = \alpha\widehat{\varphi}(\underline{v}) + \beta\widehat{\psi}(\underline{v})\ .$$

Tale spazio si indica con $\mathcal{L}(V;W)$.

Un caso particolare si ha per le applicazioni $\widehat{\varphi} : V \to \mathbb{R}$; tali applicazioni vengono dette *funzionali* lineari.
Lo spazio dei funzionali lineari, $\mathcal{L}(V;\mathbb{R})$, viene indicato con V^* e viene detto spazio *duale* di V.
Una semplice contemplazione permette di notare che il ruolo di $\widehat{\varphi}$ nella creazione del numero reale

[2] Di fatto la possibilità di scrivere un tensore di rango 2 a componenti miste trascurando l'ordine degli indici vale per tutti i tensori simmetrici. Infatti dato un tensore simmetrico $s^{\alpha\beta} = s^{\beta\alpha}$ si può abbassare l'indice β e ottenere

$$s^\alpha{}_\gamma = g_{\gamma\beta}\,s^{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta}\,s^{\beta\alpha} = s_\gamma{}^\alpha \qquad \Rightarrow \quad = s^\alpha_\gamma\ .$$

$\widehat{\varphi}(\underline{v})$ è paragonabile al ruolo di $\underline{v}$: infatti si può pensare sia di considerare $\widehat{\varphi}$ fissato e di far variare il suo argomento in V, sia di considerare $\underline{v}$ fissato e di far variare ciò che gli viene applicato in V^*. Per tale evidente simmetria si preferisce usare una scrittura più simmetrica, tramite il simbolo detto di *pairing*:

$$\langle \widehat{\varphi} \, , \, \underline{v} \rangle := \widehat{\varphi}(\underline{v}) \, .$$

Consideriamo adesso la Formula (1): le componenti controvarianti sono numeri reali, e subordinatamente alla scelta di una base in V sono univocamente definite per ogni vettore $\underline{v} \in V$. Allora esisterà un'aplicazione $\widehat{e}^{*i} \; : \; V \to \mathbb{R}$ che associa ad un vettore $\underline{v}$ la sua i-esima componente controvariante. Essendo tale applicazione un funzionale, si può scrivere

$$v^i = \langle \widehat{e}^{*i} \, , \, \underline{v} \rangle \, , \tag{7}$$

ovvero la (1) può essere riscritta come

$$\underline{v} = \langle \widehat{e}^{*i} \, , \, \underline{v} \rangle \, \underline{e}_i \, .$$

Introducendo ora gli oggetti

$$\varphi_i := \langle \widehat{\varphi} \, , \, \underline{e}_i \rangle$$

si può riscrivere l'azione di $\widehat{\varphi}$ su un vettore $\underline{v}$ nel modo seguente:

$$\langle \widehat{\varphi} \, , \, \underline{v} \rangle = \langle \widehat{\varphi} \, , \, v^i \underline{e}_i \rangle = v^i \, \langle \widehat{\varphi} \, , \, \underline{e}_i \rangle = v^i \varphi_i \, .$$

È chiaro che i φ_i identificano completamente, scelta una base in V, l'azione di $\widehat{\varphi}$ su un qualunque vettore di V: essi sono quindi buoni candidati a rappresentare le componenti di $\widehat{\varphi}$ in V^*. Per eleggerli come tali occorre fare un ulteriore passaggio: con l'ausilio della (7) si ha

$$\langle \widehat{\varphi} \, , \, \underline{v} \rangle = v^i \varphi_i = \langle \widehat{e}^{*i} \, , \, \underline{v} \rangle \varphi_i = \langle \varphi_i \widehat{e}^{*i} \, , \, \underline{v} \rangle \, ,$$

da cui segue che

$$\widehat{\varphi} = \varphi_i \widehat{e}^{*i} \, .$$

Ciò mostra che $\{\widehat{e}^{*k}\}$ formano base in V^*, detta *base duale* della base $\{\underline{e}_k\}$, e che rispetto a tale base i φ_i sono componenti di $\widehat{\varphi}$.

Dalla (7) è possibile notare una relazione importante:

$$v^j \delta^i_j = v^i = \langle \widehat{e}^{*i} \, , \, \underline{v} \rangle = \langle \widehat{e}^{*i} \, , \, v^j \underline{e}_j \rangle = v^j \, \langle \widehat{e}^{*i} \, , \, \underline{e}_j \rangle \, ,$$

da cui, eguagliando primo ed ultimo membro, ed eliminando il comune v^j, si trova

$$\langle \widehat{e}^{*i} \, , \, \underline{e}_j \rangle = \delta^i_j \, . \tag{8}$$

Giunti a questo punto è possibile inserire il prodotto scalare in questo contesto. Infatti, benché il prodotto scalare sia un'applicazione $(\;\; , \;\;) \; : \; V \times V \to \mathbb{R}$, fissando un vettore $\underline{u}$, l'applicazione $\widehat{u} \, : \, V \to \mathbb{R}$, definita come $\widehat{u} := (\underline{u} \, , \;\;)$, è un funzionale lineare, e in quanto tale rientra completamente nel quadro appena discusso.

In particolare vi è piena identificazione tra le componenti di $\widehat{u}$ in V^* e le componenti covarianti di $\underline{u}$:

$$u_i = \langle \widehat{u} \, , \, \underline{e}_i \rangle = (\underline{u} \, , \, \underline{e}_i) \, .$$

Si può giungere a tale identificazione non solo dal punto di vista della definizione, ma anche elaborando il prodotto scalare: con l'ausilio della (5) e della (8) si ottiene

$$v^i \, u_i = (\underline{u} \, , \, \underline{v}) = \langle \widehat{u} \, , \, \underline{v} \rangle = \langle \langle \widehat{u} \, , \, \underline{e}_i \rangle \, \widehat{e}^{*i} \, , \, v^j \, \underline{e}_j \rangle = \langle \widehat{u} \, , \, \underline{e}_i \rangle \, v^j \, \langle \widehat{e}^{*i} \, , \, \underline{e}_j \rangle = \langle \widehat{u} \, , \, \underline{e}_i \rangle \, v^j \, \delta^i_j = \langle \widehat{u} \, , \, \underline{e}_i \rangle \, v^i \, ,$$

da cui, eguagliando primo ed ultimo membro, ed eliminando il comune v^i

$$\langle \widehat{u} \, , \, \underline{e}_i \rangle = u_i$$

Un'osservazione interessante è la seguente:

$$(\underline{e}_i \, , \, \underline{v}) = v_i = g_{ij} \, v^j = g_{ij} \, \langle \widehat{e}^{*j} \, , \, \underline{v} \rangle \ ,$$

da cui segue l'identificazione operatoriale

$$(\underline{e}_i \, , \quad) = g_{ij} \, \widehat{e}^{*j} \ .$$

Creato con $\LaTeX\,2_\varepsilon$.