

LA GEOMETRIA DEI BUCHI NERI

Marco Bonvini

9 giugno 2008

Indice

1	Simmetrie	2
1.1	La derivata di Lie	2
1.2	Simmetrie della metrica e vettori di Killing	3
1.3	Diagrammi conformi	5
2	Metriche stazionarie	6
2.1	Singularità	8
2.2	Orizzonti degli eventi	8
2.3	Orizzonti di Killing	9
3	Buchi neri	11
3.1	Metrica di Schwarzschild: buchi neri statici	11
3.2	Metrica di Reissner-Nordström: buchi neri carichi	14
3.3	Metrica di Kerr: buchi neri rotanti	16

I contenuti di questa tesina sono una rielaborazione e una sintesi di alcuni argomenti trattati in Carrol [1, 2].
Tutte le immagini sono state tratte da [2].

1 Simmetrie

Prima di parlare della fisica dei buchi neri è necessario impadronirsi della matematica atta a descrivere lo spaziotempo; di fatto, la relatività generale è una teoria essenzialmente geometrica, e per questo motivo molto generale.

In questa prima sezione descriverò alcuni concetti geometrici riguardanti le simmetrie dello spaziotempo, e in seguito mostrerò come è possibile visualizzare in maniera intelligente su un pezzo di carta lo spaziotempo per una varietà a simmetria sferica, con il metodo dei diagrammi conformi.

1.1 La derivata di Lie

Il parco giochi della geometria differenziale è una varietà differenziabile M (manifold), uno spazio topologico localmente diffeomorfo ad \mathbb{R}^n , dove n viene detta la dimensione della varietà.

In ciascun punto x della varietà M “poggia” uno spazio tangente $T_x(M)$, uno spazio vettoriale formato dagli operatori “derivata direzionale”. Dallo spazio tangente si può costruire il suo duale, $T_x^*(M)$, detto spazio cotangente, formato dalle forme differenziali (dette anche 1-forme). Si può costruire, tramite prodotto tensore di questi spazi, tutta l'algebra tensoriale $T(T_x(M))$ (si noti che finora, operando su un singolo punto, le operazioni fatte sono puramente algebriche). L'unione delle algebre tensoriali su tutti i punti x della varietà dà luogo ad un fibrato, le cui sezioni, dette *campi tensoriali*, formano la cosiddetta *algebra tensoriale di M* , $\mathcal{D}(M)$.

Cerchiamo di capire cosa si intende per simmetria: una simmetria è la manifestazione di un gruppo continuo G che agisce su M , spostandone i punti. Questa manifestazione si esprime tramite la creazione di un gruppo a parametri di diffeomorfismi:

$$\begin{aligned} \psi : G \times M &\rightarrow M \\ g, x &\rightarrow \psi_g x . \end{aligned} \tag{1}$$

L'azione del gruppo può essere trasferita sui campi tensoriali, tramite il pull-back (generalizzato) di ψ^{-1} , cioè

$$w \rightarrow (\psi_g^{-1})^* w , \quad w \in \mathcal{D}(M) . \tag{2}$$

In questa maniera è possibile definire l'operazione di *derivata di Lie*. Se ci si concentra su un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi, chiamando t tale parametro e scegliendolo in modo tale che $\psi_{t=0} = id$, si definisce

$$\mathfrak{L}_X(w)|_x := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[(\psi_t)^* w]_x - w_x}{t} , \tag{3}$$

dove X è il campo vettoriale tangente alle linee integrali derivanti dall'azione del gruppo su M . Estendendo l'operazione ad ogni punto di M , abbiamo un'operazione

$$\mathfrak{L} : \mathcal{D}^1(M) \times \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M) . \tag{4}$$

La derivata di Lie è lo strumento adatto per studiare le simmetrie: dato un campo vettoriale X figlio di un gruppo di trasformazioni è immediato verificare se una quantità w è simmetrica rispetto a questo gruppo, semplicemente verificando se

$$\mathfrak{L}_X(w) = 0. \quad (5)$$

1.2 Simmetrie della metrica e vettori di Killing

Aniché guardare un generico campo tensoriale, concentriamoci sulle simmetrie della metrica dello spaziotempo. Essa è una 2-forma

$$\Phi = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (6)$$

le cui componenti, $g_{\mu\nu}$, sono simmetriche per scambio di indici.

Ragionando in senso opposto al paragrafo precedente, cerchiamo delle condizioni sui campi χ affinché sia soddisfatta la condizione

$$\mathfrak{L}_\chi(\Phi) = 0, \quad (7)$$

cioè che il gruppo di trasformazioni generato da χ sia una simmetria della metrica. Usando le regole di derivazione di Lie si ottiene, in componenti

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_\chi(\Phi))_{\mu\nu} &= \chi^\rho \overline{g_{\mu\nu;\rho}} + g_{\rho\nu} \chi^\rho_{;\mu} + g_{\mu\rho} \chi^\rho_{;\nu} \\ &= \chi_{\nu;\mu} + \chi_{\mu;\nu} \end{aligned} \quad (8)$$

da cui segue che, affinché χ generi una simmetria, si deve avere

$$\chi_{(\mu;\nu)} = 0 \quad (9)$$

detta *equazione di Killing*, mentre i campi χ che la soddisfano sono detti *vettori di Killing*. Verifichiamo adesso che la proiezione della quadrivelocità (o equivalentemente dell'impulso) di una particella lungo la direzione di un vettore di Killing è conservata; infatti

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau}(\chi_\mu U^\mu) &= U^\nu (\chi_\mu U^\mu)_{;\nu} \\ &= U^\nu U^\mu \chi_{\mu;\nu} + \chi_\mu U^\nu U^\mu_{;\nu} \\ &= U^\nu U^\mu \chi_{(\mu;\nu)} + \chi_\mu \frac{D}{D\tau} U^\mu \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

dove all'ultimo passaggio si è usata l'equazione di Killing (9) e l'equazione delle geodetiche $\frac{D}{D\tau} U^\mu = 0$. Il risultato di questa osservazione fa capire che alle simmetrie (e quindi ai vettori di Killing χ) sono associate quantità conservate $\chi_\mu U^\mu$.

Si osservi che combinazioni lineari di vettori di Killing, così come loro commutatori, soddisfano l'equazione di Killing (9). In generale trovare tutti i vettori di Killing per una data metrica è un'operazione non semplice, anche per il fatto che non esistono teoremi per predire il numero dei vettori di Killing.

Si osservi che l'equazione (10) può essere usata come approccio alternativo per trovare l'equazione di Killing (9), imponendo cioè l'esistenza di una quantità conservata. Questo tipo di approccio si può estendere ad oggetti più generali dei vettori di Killing, cioè a tensori simmetrici tali per cui

$$\frac{D}{D\tau}(\chi_{\mu_1 \dots \mu_k} U^{\mu_1} \dots U^{\mu_k}) = 0, \quad (11)$$

da cui si deduce, procedendo come prima, l'equazione

$$\chi_{\mu_1 \dots (\mu_k; \nu)} = 0 \quad (12)$$

(si noti che, dovendo essere il tensore simmetrico, l'indice su cui simmetrizzare può essere scelto ad arbitrio). Sebbene tali oggetti, detti tensori di Killing, siano importanti essi non sono legati in modo semplice alle simmetrie dello spaziotempo (non si può fare una derivata di Lie lungo un tensore).

Si osservi che, se la metrica non dipende esplicitamente da una delle coordinate, diciamo $\bar{\sigma}$, allora $\chi = \partial_{\bar{\sigma}}$ è un vettore di Killing. Infatti, si prenda l'equazione (8), ma scritta con le derivate ordinarie (le due forme sono equivalenti, anzi questa è quella che deriva direttamente dalla definizione); in tal caso si ha

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_\chi(\Phi))_{\mu\nu} &= \chi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu \chi^\rho + g_{\mu\rho} \partial_\nu \chi^\rho \\ &= \chi^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\sigma}} g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu \chi^\rho + g_{\mu\rho} \partial_\nu \chi^\rho \\ &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

dove il primo termine si è cancellato in virtù della non dipendenza da $\bar{\sigma}$ della metrica, e gli altri due per il fatto che χ è un vettore la cui unica componente non nulla è quella $\bar{\sigma}$ ed è costante (= 1). Ciò significa chiaramente che $\chi = \partial_{\bar{\sigma}}$ soddisfa l'equazione di Killing (9), come si può verificare direttamente osservando quali parti dei coefficienti di Christoffel sono nulli per la non dipendenza da $\bar{\sigma}$ della metrica.

Da questo discorso segue che, per scelte di coordinate sufficientemente furbe, trovare i vettori di Killing è una semplice conseguenza dell'osservazione dei coefficienti della metrica. Ciò non toglie, come già detto, che possano esistere altri vettori di Killing non così evidenti. A concludere, si osservi che l'esistenza di vettori di Killing porta a poter definire delle correnti conservate: infatti la corrente

$$J_T^\mu := \chi_\nu T^{\mu\nu}, \quad (14)$$

dove $T^{\mu\nu}$ è il tensore energia impulso, è conservata:

$$J_{T;\mu}^\mu = \chi_{\nu;\mu} T^{\mu\nu} + \chi_\nu T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad (15)$$

per l'equazione di Killing (unita alla simmetria di $T^{\mu\nu}$) e la conservazione del tensore energia impulso. Se χ è timelike, ciò permette di definire una energia dello spazio contenuto entro l'ipersuperficie spacelike Σ :

$$E_T = \int_\Sigma d^3x \sqrt{\gamma} J_T^\mu n_\mu \quad (16)$$

dove γ_{ij} sono le componenti della metrica indotta su Σ (il pull-back di Φ rispetto all'embedding $i : M \rightarrow \Sigma$) e n è il versore normale a Σ .

1.3 Diagrammi conformi

Un modo per “visualizzare” l’universo in pezzetto di carta è il metodo dei *diagrammi conformi*, detti anche diagrammi di Carter-Penrose, che illustrerò brevemente.

Per cominciare introduciamo il concetto di trasformazione conforme, che è essenzialmente un cambiamento locale di scala:

$$\Phi \rightarrow \tilde{\Phi} = \omega^2(x) \Phi \quad (17)$$

dove $\omega(x)$ è una funzione arbitraria che non si annulla mai. Due metriche Φ e $\tilde{\Phi}$ legate dalla relazione (17) sono metriche diverse (descriventi quindi universi diversi) che vengono dette conformalmente equivalenti.

È evidente, e molto importante, che una trasformazione conforme lascia invariate le curve nulle:

$$\Phi(v, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}(v, v) = \omega^2(x) \Phi(v, v) = 0 \quad (18)$$

per ogni vettore v nullo. Questo significa anche che una curva timelike rimane tale e analogamente una spacelike.

La costruzione di un diagramma conforme consiste nell’effettuare dei cambi di coordinate in modo da portare la metrica in una forma conformalmente equivalente ad una metrica semplice e le cui coordinate abbiano dei limiti finiti, tali per cui sia possibile farne un disegno.

Il metodo utilizzato è quello di passare dalla generica coordinata x ad $\arctan(x)$, mappando quindi $(-\infty, +\infty)$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (o $[0, +\infty)$ in $[0, \frac{\pi}{2})$ nel caso di una coordinata radiale). Tuttavia occorre fare attenzione, perché se si fa ciò per le coordinate t ed r della metrica di Minkowski in coordinate sferiche si ottiene un cono di luce a pendenza variabile. Siccome vogliamo rispettare la condizione $\frac{dr}{dt} = \pm 1$ la scelta saggia è passare a coordinate nulle, di queste prenderne l’arcotangente e poi tornare a coordinate timelike e spacelike.

Questa procedura, per la metrica di Minkowski, procede come segue: si prendono le coordinate nulle

$$\begin{cases} u = t - r \\ v = t + r \end{cases}, \quad \begin{cases} -\infty < u < +\infty \\ -\infty < v < +\infty \\ u \leq v \end{cases}, \quad (19)$$

se ne prende l’arcotangente

$$\begin{cases} U = \arctan(u) \\ V = \arctan(v) \end{cases}, \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2} \\ U \leq V \end{cases} \quad (20)$$

e si torna indietro

$$\begin{cases} T = U + V \\ R = V - U \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \leq R < \pi \\ |T| + R < \pi \end{cases}. \quad (21)$$

In questo modo, tenendo traccia passo passo dei limiti delle coordinate, si trova la metrica

$$\Phi = (\cos T + \cos R)^2 (-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2), \quad (22)$$

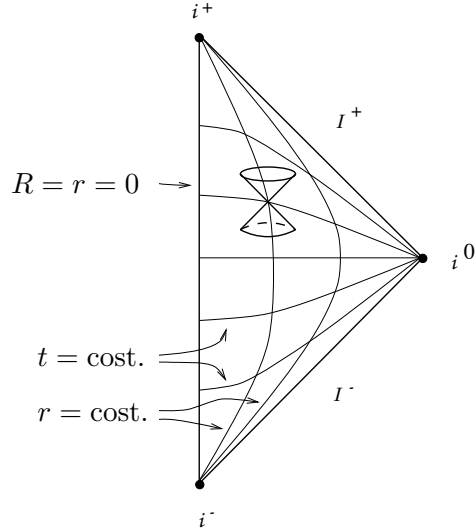


Figura 1: Diagramma conforme per la metrica di Minkowski

conformalmente equivalente a

$$\tilde{\Phi} = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2 . \quad (23)$$

Uno spaziotempo descritto dalla metrica $\tilde{\Phi}$ può venire visualizzato come in Figura 1; la semplicità di un tale diagramma e l'informazione che porta lo rendono uno strumento molto importante per descrivere metriche più complicate (come vedremo). Le sue caratteristiche principali sono:

- i coni di luce sono a 45° , come volevamo;
- i^+ è l'infinito timelike futuro;
- i^- è l'infinito timelike passato;
- i^0 è l'infinito spacelike;
- \mathcal{I}^+ è l'infinito nullo futuro;
- \mathcal{I}^- è l'infinito nullo passato;
- le geodetiche timelike partono tutte da i^- e terminano tutte in i^+ .
- le geodetiche nulle partono tutte da \mathcal{I}^- e terminano tutte in \mathcal{I}^+ (si ricordi che R è una coordinata radiale, nel diagramma sono soppresse le coordinate angolari, quindi ogni punto è una sfera S^2).

2 Metriche stazionarie

Sebbene tratteremo metriche più generali (Kerr) di particolare interesse sono le metriche a simmetria sferica. Per tale simmetria, il teorema di Birkhoff dimostra che la metrica più generale assume la forma

$$\Phi = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (24)$$

dove $\alpha(r, t)$ e $\beta(r, t)$ sono due funzioni arbitrarie delle coordinate r e t . Questa forma è dedotta da semplici considerazioni geometriche, perciò è un risultato molto generale.

Supponendo di avere una massa concentrata intorno all'origine delle coordinate spaziali si possono risolvere le equazioni di Einstein nel vuoto ($T^{\mu\nu} = 0$), cioè

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (25)$$

per questa metrica. Il primo risultato che si trova, con conti semplici ma lunghi, è che β non dipende da t ; il secondo è che $\partial_t \partial_r \alpha = 0$, da cui

$$\alpha(r, t) = f(r) + g(t) . \quad (26)$$

Quindi possiamo ridefinire t in modo tale che $g(t) = 0$ e dunque si ha

$$\Phi = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 ; \quad (27)$$

Questo risultato, contrariamente all'eq. (24), non è puramente geometrico, in quanto dedotto dall'equazione di Einstein. Si osservi che lo spaziotempo piatto Minkowskiano ha esattamente questa forma. Se lo spazio però non è completamente vuoto ma ha massa al suo interno la soluzione delle equazioni di Einstein per questa metrica porta alla soluzione di Schwarzschild

$$\Phi = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (28)$$

Questo significa che il teorema di Birkhoff mostra che la soluzione di Schwarzschild è l'unica soluzione per uno spaziotempo a simmetria sferica che sia vuoto verso l'infinito.¹

La metrica (27) presenta un'importante caratteristica: è indipendente da t . Questo significa che ∂_t è un vettore di Killing, e all'infinito esso è timelike (altrove può cambiare, ad esempio nella metrica di Schwarzschild diventa nullo a $r = 2GM$). L'esistenza di un vettore di Killing timelike è molto importante (ad esempio per la definizione dell'energia (16)), e merita quindi di dare luogo alla seguente definizione: uno spaziotempo che possiede un vettore di Killing che sia timelike vicino all'infinito è detto *stazionario*. La metrica di Schwarzschild è un esempio di metrica stazionaria, come anche le metriche di Reissner-Nordström e di Kerr che vedremo.

Una metrica stazionaria ha la particolarità che esistono sistemi di coordinate per cui il vettore di Killing timelike è proprio ∂_t e i coefficienti della metrica (in generale non diagonale) non dipendono da t . Se la metrica possiede un vettore di Killing timelike che inoltre è ortogonale ad una famiglia di ipersuperfici la metrica è detta *statica*. In tal caso una scelta opportuna delle coordinate permette di scrivere la metrica indipendente da t e con i termini g_{tj} nulli per $j \neq t$.

¹Per poter dire "verso l'infinito" occorre verificare che, per $r \rightarrow \infty$, la metrica sia quella di Minkowski; in questo caso la verifica è banale.

2.1 Singolarità

Prendiamo come esempio la metrica (28); si vede subito che qualcosa non va (certi coefficienti diventano infiniti) per

$$r = 0 , \tag{29a}$$

$$r = 2GM . \tag{29b}$$

In queste due zone dello spazio tempo c'è da aspettarsi che accada qualcosa di strano. Tuttavia dire che sono punti di singolarità è troppo azzardato: potrebbe essere che le coordinate usate non siano le migliori, e generino loro questi problemi (ad esempio in Minkowski usando coordinate polari per $r = 0$ la metrica controvariante diventa infinita nel coefficiente della parte angolare, ma di singolarità vere non vi è traccia).

Il modo onesto per determinare se è presente una singolarità è vedere se la curvatura è singolare. Visto che il tensore di Riemann $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ dipende dalle coordinate, l'unico modo per esprimersi sulla sua singolarità è guardare scalari formati a partire dal tensore di Riemann. Uno di questi è sicuramente lo scalare di Ricci R , ma anche $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ va bene o espressioni più complicate.

Se si trova che uno di questi scalari è singolare allora si è certi che quel punto è una singolarità, altrimenti bisognerebbe verificare tutti gli scalari possibili, cosa abbastanza impegnativa. Nel caso di Schwarzschild si trova che nessuno scalare diverge per $r = 2GM$, perciò tale punto non è una singolarità e ci avverte che le coordinate scelte non sono adatte. Invece si trova che

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{r^6} \tag{30}$$

che è singolare in $r = 0$, che quindi rappresenta un vero punto di singolarità.

Sulle singolarità esistono numerosi teoremi, la maggior parte dei quali portano i nomi di Penrose e Hawking. Tali teoremi mostrano che, sotto certe assunzioni ragionevoli, anche il collasso di una stella (durante l'esistenza della quale non vi è alcuna singolarità) porta, superato un certo limite, all'inevitabile formazione di una singolarità. Il limite che si deve superare viene chiamato *superficie intrappolata* (trapped surface), cioè una sottovarietà bidimensionale spacelike compatta tale che i raggi di luce diretti al futuro che partono dalla superficie stessa rimangono all'interno della superficie.

2.2 Orizzonti degli eventi

Tornando alla metrica di Schwarzschild, si è osservato che la zona corrispondente a $r = 2GM$ non è singolare: allora cos'è? Prendiamo un raggio di luce, che si propaga ad angolo costante su una geodetica nulla. Allora dalla (28) si ha

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \tag{31}$$

che si annulla per $r = 2GM$. Questo non significa che la velocità del raggio di luce è nulla, ma semplicemente che la coordinata r diventa lightlike a $r = 2GM$. Per $r < 2GM$ i coefficienti g_{tt} e g_{rr} cambiano segno e la coordinata r diventa timelike (e t spacelike).

Questo significa che all'interno della superficie $r = 2GM$ ogni oggetto, massivo o non, è costretto a muoversi (non può rimanere a $r = \text{cost.}$, esattamente come al di fuori non può stare a $t = \text{cost.}$), e tale moto è nella direzione degli r decrescenti, cioè verso la singolarità. La superficie $r = 2GM$ è perciò una “superficie di non ritorno” (da cui il nome *buco nero*), e per questo viene detta *orizzonte degli eventi*.

Il concetto di orizzonte degli eventi può essere formalizzato come segue: una superficie che separa punti dello spaziotempo connessi con l'infinito da curve timelike rispetto a punti che non lo sono. Come appare chiaro dalla definizione, l'orizzonte degli eventi è un concetto globale, perciò non è immediato riconoscerne uno osservando la metrica, che è un oggetto locale; tuttavia per scelte di coordinate astute, come nel caso delle metriche stazionarie asintoticamente piatte, spesso è semplice riconoscerlo. Dalla definizione segue che l'orizzonte degli eventi è una superficie nulla: le superfici nulle sono caratterizzate dall'aver vettori normali nulli.

Nel caso di metriche stazionarie asintoticamente piatte è semplice riconoscere un orizzonte degli eventi: se si scelgono le coordinate in maniera intelligente, si avrà che una superficie $r = \text{cost.}$ sarà timelike vicino all'infinito, e ad un certo R_H diventerà nulla. La superficie $r = R_H$ è perciò un orizzonte degli eventi, e risulta facile da trovare: infatti essendo la superficie nulla la 1-forma $dr = (\partial_\mu r) dx^\mu$ è normale alla superficie, e ha norma

$$(dr, dr) = g^{\mu\nu}(\partial_\mu r)(\partial_\nu r) = g^{rr} ; \quad (32)$$

allora la superficie è nulla quando g^{rr} è nullo, e quindi si ha l'equazione

$$g^{rr}(R_H) = 0 . \quad (33)$$

Tornando alla metrica di Schwarzschild, vediamo quindi che la singolarità è racchiusa all'interno di un orizzonte degli eventi. Che questo sia sempre vero non è generale, e una singolarità che non sia circondata da un orizzonte degli eventi viene detta *singolarità nuda*. Se un universo ha una singolarità nuda esistono traiettorie timelike che la raggiungono e che possono tornare all'infinito per raccontarlo. Tuttavia esiste una congettura (che, in quanto tale, non è dimostrata) riguardo la formazione di singolarità: nel collasso gravitazionale non si può formare una singolarità nuda in un universo inizialmente non singolare, asintoticamente piatto e per cui valga la condizione di energia dominante². Questa affermazione prende il nome di *ipotesi di censura cosmica*.

2.3 Orizzonti di Killing

Supponiamo che un vettore di Killing χ diventi nullo (lightlike) su di una superficie Σ anch'essa nulla³: diremo che tale superficie è un *orizzonte di Killing*.

Il primo risultato importante è il seguente: per uno spaziotempo stazionario asintoticamente piatto ogni orizzonte degli eventi è anche un orizzonte di Killing per un opportuno χ . Nel

²La condizione di energia dominante (DEC) è una delle forme di restrizione sulle proprietà che la materia deve avere nell'universo. In particolare la DEC asserisce che $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ per ogni vettore timelike t^μ e che $T^{\mu\nu}t_\nu$ è un vettore timelike o nullo.

³Una superficie nulla è una superficie per cui i vettori normali ad essa in ogni suo punto sono nulli.

caso in cui lo spaziotempo è statico, $\chi = \partial_t$, essendo t la coordinata temporale all'infinito. Se lo spaziotempo non è statico, allora esso avrà un asse di simmetria e un vettore di Killing ∂_ϕ , essendo ϕ l'angolo attorno all'asse, e $\chi = \partial_t + \Omega_H \partial_\phi$ è il vettore di Killing il cui orizzonte coincide con l'orizzonte degli eventi (vedremo il significato di Ω_H).

Ad ogni orizzonte di Killing può essere associata una quantità κ , detta *gravità superficiale*. Essa è definita come segue: visto che χ è un vettore normale a Σ , per esso, sulla superficie varrà l'equazione delle geodetiche

$$\chi^\mu \chi^\nu{}_{;\mu} = -\kappa \chi^\nu \quad (34)$$

dove è evidente che κ dipende dalla parametrizzazione della geodetica e quindi è arbitrario (ma è costante sulla superficie, a meno di un eventuale cambiamento di segno). Tuttavia gli si può dare un senso che elimini l'arbitrarietà.

In spaziotempi statici asintoticamente piatti questo si ottiene richiedendo la normalizzazione di $\chi = \partial_t$

$$(\partial_t, \partial_t) \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} -1 \quad (35)$$

e se lo spaziotempo è stazionario ma non statico questa condizione è comunque sufficiente a fissare la normalizzazione della combinazione lineare $\chi = \partial_t + \Omega_H \partial_\phi$, rendendo κ ben definita.

Il nome gravità superficiale deriva dal fatto che, se lo spaziotempo è statico, κ è l'accelerazione che un osservatore ha vicino all'orizzonte, misurata da un osservatore all'infinito. Per vederlo supponiamo che esiste un osservatore statico all'infinito, con ciò intendendo che la sua quadrivelocità sia proporzionale a ∂_t :

$$\partial_t = V(x)U \quad (36)$$

essendo $V(x)$ in generale dipendente dal punto. $V(x)$, il cui valore può essere scritto come $\sqrt{-(\partial_t, \partial_t)}$, assume il valore 1 all'infinito e 0 all'orizzonte. Per stabilire il concetto di accelerazione vicino all'orizzonte bisogna ricordare che un osservatore che “cade” verso l'orizzonte in realtà si muove lungo una geodetica, perciò la sua quadriaccelerazione è nulla; allora per ottenere una “accelerazione di gravità” basta rovesciare la medaglia e vedere quale dev'essere la quadriaccelerazione nel caso in cui esso tenti di stare fermo ad una certa distanza fissa dal centro di gravità. La quadriaccelerazione è quindi

$$a^\mu = \frac{D}{D\tau} U^\mu = U^\rho U^\mu{}_{;\rho} = (\log V)^{;\mu} \quad (37)$$

e il suo modulo è $a = V^{-1} \sqrt{V_{;\mu} V^{;\mu}}$ che tende all'infinito all'orizzonte. Tuttavia l'accelerazione come vista dall'osservatore all'infinito subisce un redshift⁴ dato da un fattore V , e quindi la gravità superficiale è

$$\kappa = Va = \sqrt{V_{;\mu} V^{;\mu}}. \quad (38)$$

⁴Per capirlo basta pensare ad un fotone: la quantità (p, ∂_t) si conserva (si veda l'eq. (13), p è l'impulso del fotone) e può essere pensata come l'energia del fotone (all'infinito lo è). Per l'osservatore all'infinito però la frequenza del fotone è (p, U) , e il rapporto dell'energia con questa frequenza è proprio V , che viene quindi anche chiamato fattore di redshift.

Se la metrica è stazionaria ma non statica, il vettore di Killing ∂_t diventerà nullo su di una superficie che in generale è timelike, al di fuori dell'orizzonte di Killing. Tale superficie viene detta *superficie del limite stazionario* o *ergosuperficie*, e lo spazio tra questa superficie e l'orizzonte di Killing è detto *ergosfera*. Il nome è dovuto al fatto che all'interno della superficie del limite stazionario ∂_t diventa spacelike e quindi nessun osservatore può rimanere stazionario; in particolare, ogni osservatore viene trascinato nella direzione di rotazione del buco nero, come vedremo in dettaglio per la metrica di Kerr.

3 Buchi neri

... ma se l'io del futuro ora è nel passato,
com'è possibile che tu lo sappia?

Doc. Emmett Brown
Ritorno al Futuro, parte III

Un pianeta, o una stella, può essere considerato, in prima approssimazione, come avente simmetria sferica. Se si guarda più in dettaglio però, e si osservano le montagne, la deformazione dovuta alla rotazione, ecc. la simmetria viene meno e un buon modo di descrivere il corpo è tramite uno sviluppo in multipoli: tale sviluppo contiene naturalmente infiniti termini, ed è quindi necessario per descrivere un pianeta avere infiniti parametri.

Per un buco nero (un oggetto talmente massivo da stare dentro un orizzonte degli eventi) la storia è più sorprendente, e decisamente più semplice. Infatti è sufficiente un numero finito e molto piccolo di parametri per descriverlo completamente. Se l'elettromagnetismo è l'unica teoria a lungo raggio (oltre alla gravità), allora vale il *teorema di assenza di peli*: buchi neri stazionari (in universo asintoticamente piatto) descritti dalla relatività generale accoppiata con l'elettromagnetismo che non presentino singolarità al di fuori dell'orizzonte degli eventi sono descritti dalla massa, dalla carica elettrica e magnetica e dal momento angolare.

Se il buco nero non è stazionario esso oscillerà per tendere velocemente ad uno stato stazionario emettendo radiazione gravitazionale.

3.1 Metrica di Schwarzschild: buchi neri statici

Ho già parlato della metrica di Schwarzschild (28) e del fatto che le coordinate t e r non sono le più adatte, a causa della presenza nella metrica di coefficienti singolari laddove è presente solo un orizzonte degli eventi e del fatto (31) che i coni di luce non sono a 45° .

Senza entrare nel dettaglio, illustrerò i vari step che permettono di definire coordinate migliori, in cui la metrica non sia singolare e i coni luce siano ovunque a 45° . Questa procedura può portare a due mete: il diagramma di Kruskal e il diagramma conforme. Sebbene il primo sia storicamente più interessante, il secondo permette un confronto più diretto con i successivi casi.

Per prima cosa si integra la (31) ottenendo

$$t = \pm r^* + \text{cost.}, \quad r^* = r + 2GM \log\left(\frac{r}{2GM} - 1\right). \quad (39)$$

Scegliendo r^* come coordinata al posto di r abbiamo “raddrizzato” il cono di luce, ma spinto a $r^* = -\infty$ l’orizzonte degli eventi $r = 2GM$. Allora si passa a coordinate nulle

$$\begin{cases} v = t + r^* \\ u = t - r^* \end{cases}, \quad (40)$$

il che non risolve il problema, ma qui possiamo trasformare ancora le coordinate per portare al finito l’orizzonte degli eventi senza perdere la pendenza corretta del cono di luce:

$$\begin{cases} v' = e^{v/4GM} & = \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} e^{(r+t)/4GM} \\ u' = -e^{-u/4GM} & = -\sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} e^{(r-t)/4GM} \end{cases}. \quad (41)$$

La metrica scritta per mezzo di queste coordinate diventa

$$\Phi = -\frac{16G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} (dv' du' + du' dv') + r^2 d\Omega^2 \quad (42)$$

essendo r scritta in termini di u' e v' , come si può ricavare da $u'v' = -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{r/2GM}$. Si noti che con queste coordinate la metrica è manifestamente non singolare all’orizzonte degli eventi, e sono estendibili al suo interno.

A questo punto è utile per chiarezza tornare a coordinate timelike e spacelike. Se si fa direttamente si ottengono le coordinate di Kruskal, se invece si procede come per i diagrammi conformi, partendo però dal secondo step (visto che u' e v' sono già coordinate nulle) possiamo ottenere il diagramma conforme. Nel primo caso si sceglie

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(v' + u') \\ R = \frac{1}{2}(v' - u') \end{cases}, \quad (43)$$

e si ottiene la metrica

$$\Phi = -\frac{32G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (44)$$

e il diagramma di Figura 2. Questo diagramma ha un sacco di proprietà interessanti, ma una cosa in particolare è la presenza delle regioni III e IV: la III rappresenta un buco nero “al contrario”, cioè da cui tutto deve sfuggire e nulla può entrare, detto quindi *buco bianco*; la IV rappresenta un universo asintoticamente piatto alternativo a quello in cui siamo noi (regione I), e collegato al nostro attraverso una galleria di tarlo (wormhole) o ponte di Einstein-Rosen.

Le coordinate di Kruskal T e R hanno un range infinito; per ottenere un diagramma conforme vogliamo invece che le coordinate abbiano un range finito. Per fare ciò torniamo alla metrica (42) e definiamo le coordinate

$$\begin{cases} V = \arctan\left(\frac{v'}{\sqrt{2GM}}\right) \\ U = \arctan\left(\frac{u'}{\sqrt{2GM}}\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < V + U < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (45)$$

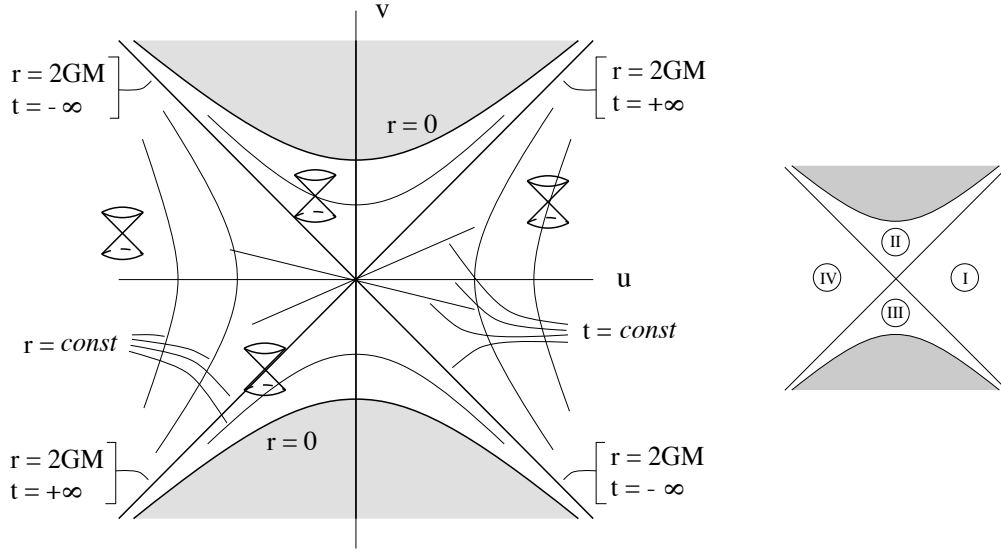


Figura 2: Diagramma di Kruskal per la metrica di Schwarzschild.

e quindi

$$\begin{cases} T' = V + U \\ R' = V - U \end{cases}, \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < T' < \frac{\pi}{2} \\ -\pi < R' < \pi \end{cases}, \quad (46)$$

da cui otteniamo il diagramma conforme della Figura 3.

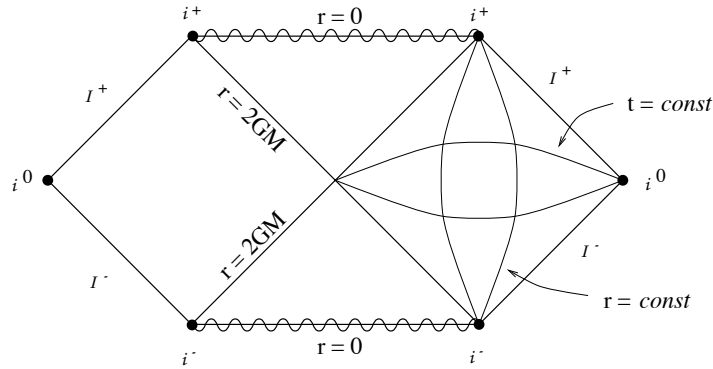


Figura 3: Diagramma conforme per la metrica di Schwarzschild.

Infine osserviamo che, sebbene tacitamente sottinteso, il parametro M che compare nella metrica può essere interpretato come la massa del buco nero. Per verificarlo si potrebbe pensare di usare l'equazione (16) per calcolare l'energia, ma visto che attorno al buco vi è il vuoto, tale integrale è nullo. Questo risultato sembra palesemente sbagliato: dal punto di vista fisico, un buco nero può essere lo stato finale dell'evoluzione di una stella, che in principio aveva energia non nulla, e dal punto di vista matematico c'è un problema dovuto alla presenza della singolarità. Allora l'idea buona è definire una nuova corrente

$$J_R^\mu := \chi_\nu R^{\mu\nu} \quad (47)$$

anch'essa conservata, e di usarla per definire un'energia, che in questo caso viene esattamente M .

3.2 Metrica di Reissner-Nordström: buchi neri carichi

La metrica di Schwarzschild è molto particolare, in quanto richiede staticità e che l'universo al di fuori del buco sia completamente vuoto. Se il buco nero possiede una carica elettrica (e magnetica, posto che esista) globalmente non nulla (cosa possibile anche se non troppo perché verrebbe neutralizzato dall'eventuale materia circostante) allora in tutto l'universo è presente un tensore energia impulso diverso da zero, dovuto al campo elettromagnetico, e la soluzione di Schwarzschild non è più appropriata.

Per prima cosa ci occorre la carica. Essa è definita come l'integrale su di una ipersuperficie Σ della corrente J_e^μ , legata dalle equazioni di Maxwell (estese a spazi curvi tramite il principio di covarianza generale) al tensore elettromagnetico: $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = J_e^\mu$. Quindi

$$\begin{aligned} Q &= - \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\gamma} n_\mu J_e^\mu \\ &= - \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\gamma} n_\mu F^{\mu\nu}{}_{;\nu} \\ &= - \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}} n_\mu \sigma_\nu F^{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (48)$$

dove n^μ è il versore normale a Σ , σ^μ analogo per $\partial\Sigma$ e γ_{ij} e $\gamma_{ij}^{(2)}$ sono le metriche indotte rispettivamente su Σ e $\partial\Sigma$. Una carica magnetica si definisce analogamente sostituendo a $F^{\mu\nu}$ il suo duale di Hodge $\star F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$.

Se consideriamo un buco nero carico a simmetria sferica, sappiamo dal teorema di Birkhoff che la metrica più generale è la (24), i cui coefficienti vanno trovati risolvendo l'equazione di Einstein, questa volta non nel vuoto ma con un tensore energia impulso

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} . \quad (49)$$

Per via della simmetria sferica, le uniche componenti non nulle di $F^{\mu\nu}$ sono quelle associate alle componenti radiali E_r e B_r di campo elettrico e magnetico, e quindi

$$\begin{cases} F_{rt} = -F_{tr} = f(r, t) \\ F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta} = g(r, t) \sin\theta \end{cases} . \quad (50)$$

Le equazioni di Maxwell e di Einstein portano rispettivamente a

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (51a)$$

$$F_{[\mu\nu];\rho} = 0 \quad (51b)$$

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (51c)$$

un sistema di equazioni accoppiate per $F^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$. La soluzione di tale sistema è nota come la *metrica di Reissner-Nordström*

$$\Phi = -\Delta(r) dt^2 + \Delta^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (52)$$

dove

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2}, \quad (53)$$

essendo Q la carica elettrica e P la carica magnetica.

Per capire le proprietà di questa soluzione, andiamo alla ricerca di orizzonti degli eventi; usando l'equazione (33) si ha

$$g^{rr}(R_H) = \Delta(r) = 0 \quad (54)$$

da cui si trova

$$R_H^\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - G(Q^2 + P^2)}. \quad (55)$$

A seconda del valore dell'espressione dentro la radice si prefigurano 3 possibilità: 0, 1 o 2 orizzonti degli eventi. Tramite cambiamenti di coordinate opportuni, come quelli usati nel caso della metrica di Schwarzschild, si possono creare i diagrammi conformi per queste tre casistiche. Vediamole una per una.

$$GM^2 < Q^2 + P^2$$

In questo caso non ci sono orizzonti degli eventi, la metrica è singolare solo a $r = 0$ e costruire il diagramma conforme è semplicissimo (Figura 4). Questo spaziotempo possiede

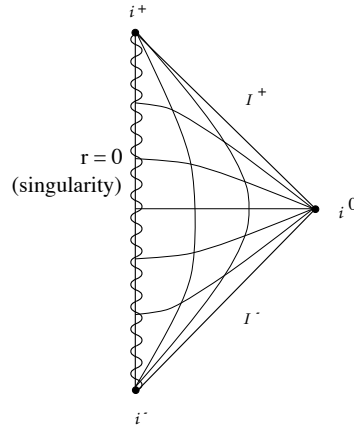


Figura 4: Diagramma conforme per la metrica RN nel caso $GM^2 < Q^2 + P^2$.

una singolarità nuda timelike, e non sembra molto verosimile (va contro l'ipotesi di censura cosmica); di fatto la situazione $GM^2 < Q^2 + P^2$ sarebbe come dire che l'energia gravitazionale è minore di quella elettromagnetica, cosa che è altamente improbabile per il discorso precedente sul fatto che la carica verrebbe neutralizzata in fretta.

$$GM^2 = Q^2 + P^2$$

Questa soluzione, nota come *estrema*, è una soluzione instabile, in quanto basta un po' di carica in più per finire nel caso precedente o un po' di massa neutra in più per finire nel prossimo. In questo caso, comunque, esiste un solo orizzonte degli eventi a $R_H = GM$; inoltre al suo interno la coordinata r rimane spacelike (a differenza della soluzione di

Schwarzschild), per cui anche qui la singolarità $r = 0$ è timelike. Come si vede in Figura 5 l'universo è formato da infinite parti asintoticamente Minkowskiane, e ciascuna ha un

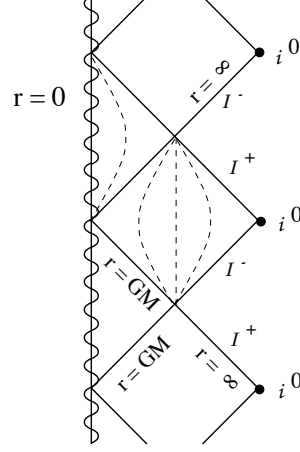


Figura 5: Diagramma conforme per la metrica RN nel caso $GM^2 = Q^2 + P^2$.

orizzonte degli eventi passato con un buco bianco e un orizzonte degli eventi futuro con un buco nero. Un osservatore può percorrere una curva timelike per entrare in un buco nero ed uscire da un buco bianco nel successivo di questi universi.

$$GM^2 > Q^2 + P^2$$

Questo caso è il più significativo, visto che ciascun buco nero carico ma non troppo rientra in questa categoria. In questo caso sono presenti due orizzonti degli eventi a R_H^\pm espressi in (55). Tra i due orizzonti r diventa timelike, ma all'interno dell'orizzonte più interno torna ad essere spacelike, e ancora una volta la singolarità $r = 0$ è una linea timelike. Il diagramma conforme per questa soluzione è illustrato in Figura 6. Anche qui sono presenti infinite parti asintoticamente piatte: infatti un osservatore potrebbe raggiungere R_H^+ , dove verrebbe attratto inesorabilmente verso R_H^- , ma superato il secondo orizzonte potrebbe scegliere di tornare fuori, e oltrepassato R_H^- verrebbe spinto verso r crescenti fino ad uscire da un buco bianco in un'altro universo.

3.3 Metrica di Kerr: buchi neri rotanti

Trovare la soluzione per un buco nero rotante è molto più complicato, visto che viene meno la simmetria sferica. Tuttavia, essendo presente una simmetria rotazionale attorno ad un asse, con vettore di Killing ∂_ϕ , si può trovare una soluzione, nota come *metrica di Kerr*:

$$\begin{aligned} \Phi = - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} (dt d\phi + d\phi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] d\phi^2 \quad (56) \end{aligned}$$

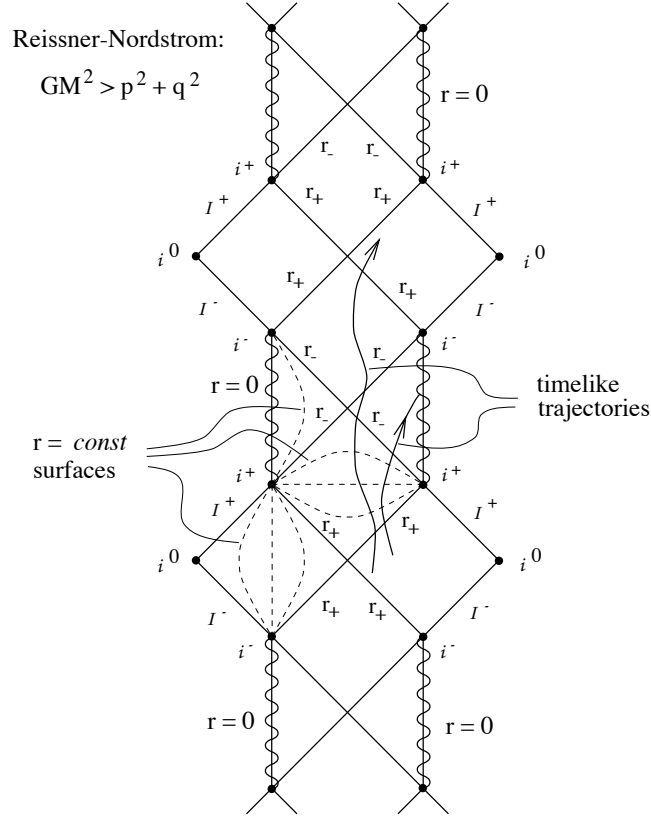


Figura 6: Diagramma conforme per la metrica RN nel caso $GM^2 > Q^2 + P^2$.

con

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \quad (57a)$$

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta . \quad (57b)$$

Il parametro M è identificabile con la massa del buco nero, come si può verificare tramite l'integrale della corrente (47); l'altro parametro è

$$a = \frac{J}{M} \quad (58)$$

dove J è il momento angolare del buco nero, derivante dalla corrente $(\partial_\phi)_\nu R^{\mu\nu}$.

Come si può osservare ponendo $M = 0$ nella metrica (56) essa descrive uno spaziotempo asintoticamente Minkowskiano, ma con coordinate ellittiche. Come evidente osservando la metrica sono presenti due vettori di Killing ∂_t e ∂_ϕ . Esiste anche un tensore di Killing

$$\sigma^{\mu\nu} = 2\rho^2 l^{(\mu} n^{\nu)} + r^2 g^{\mu\nu} \quad (59)$$

dove

$$l^\mu = \frac{1}{\Delta} (r^2 + a^2, \Delta, 0, a) , \quad n^\mu = \frac{1}{2\rho^2} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a) . \quad (60)$$

Per trovare gli orizzonti degli eventi, dobbiamo porre

$$g^{rr}(R_H) = \frac{\Delta(r)}{\rho^2} = 0 \quad (61)$$

da cui si trova

$$R_H^\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2} . \quad (62)$$

Anche qui sono presenti 3 casistiche, a seconda del valore di $G^2M^2 - a^2$: come prima, se l'espressione è $= 0$ si ha una soluzione instabile, mentre nel caso $G^2M^2 < a^2$, corrispondente ad una rotazione velocissima (troppo), si ha una singolarità nuda. Il caso interessante fisicamente è $G^2M^2 > a^2$, il cui diagramma conforme è disegnato in Figura 7 (si noti che non essendoci simmetria sferica il diagramma conforme non è adattissimo). Esso è

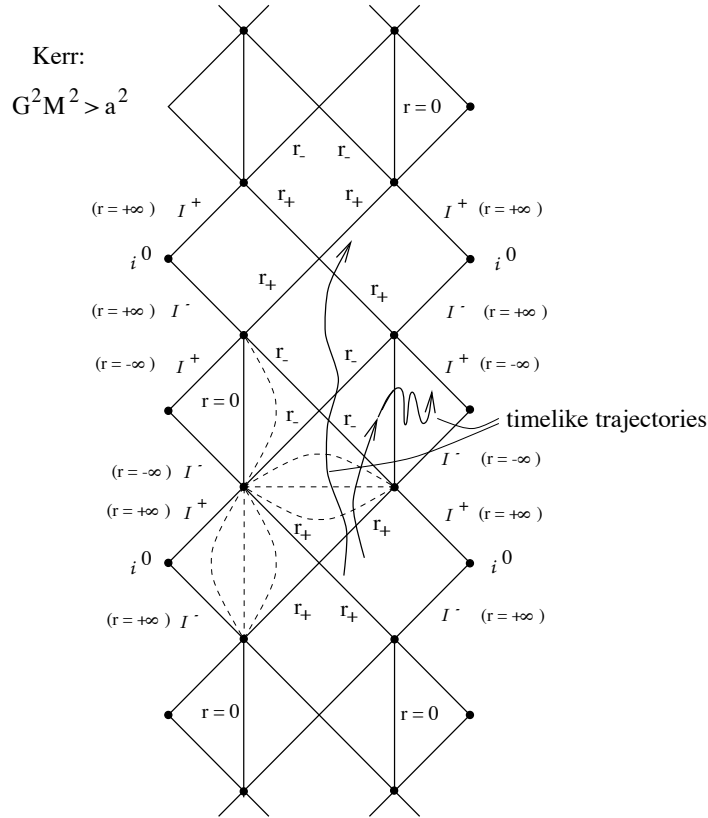


Figura 7: Diagramma conforme per la metrica di Kerr nel caso $G^2M^2 > a^2$.

molto simile al caso di Reissner-Nordström di Figura 6, eccetto che per la zona vicino alla singolarità. Infatti una onesta singolarità si ha per $\rho = 0$, che corrisponde alla coppia

$$\begin{cases} r = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (63)$$

cioè ad una circonferenza di raggio a . Si presenta quindi la possibilità per un osservatore di attraversare a questo cerchio, e un prolungamento analitico della soluzione permette di

trovare che si finisce in un universo asintoticamente piatto corrispondente a $r < 0$, senza orizzonti degli eventi, in cui esistono curve timelike chiuse. Infatti per un moto circolare a t e θ costanti e con r negativo e sufficientemente piccolo si ha

$$\Phi \sim a^2 \left(1 + \frac{2GM}{r} \right) d\phi^2, \quad (64)$$

il cui coefficiente è negativo, e quindi è possibile chiudere una curva timelike nel passato, il che è ovviamente contraddittorio.

Come già sappiamo, essendo questa soluzione stazionaria ma non statica l'orizzonte degli eventi è l'orizzonte di Killing per la combinazione $\partial_t + \Omega_H \partial_\phi$, dove abbiamo anticipato che Ω_H è la velocità di rotazione dell'orizzonte. Vediamolo in dettaglio.

La norma di ∂_t è

$$(\partial_t, \partial_t) = - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) = -\frac{1}{\rho^2} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \quad (65)$$

che non si annulla all'orizzonte degli eventi, corrispondente a $\Delta = 0$. La superficie a cui ∂_t diventa nulla è quindi la superficie del limite stazionario, e tra essa e l'orizzonte vi è l'ergosfera (Figura 8). Nell'ergosfera t è spacelike e quindi non si può stare stazionari. In

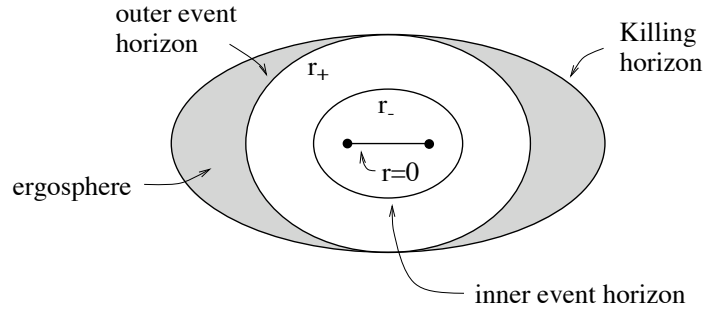


Figura 8: Orizzonte degli eventi ed ergosfera per la metrica di Kerr.

particolare si è trascinati nella direzione di rotazione. Infatti per un raggio di luce emesso nella direzione di ϕ a $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha l'equazione

$$g_{tt} + 2g_{t\phi} \frac{d\phi}{dt} + g_{\phi\phi} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = 0 \quad (66)$$

la cui soluzione è

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)_{\pm} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}. \quad (67)$$

Alla superficie del limite stazionario $g_{tt} = 0$ e si hanno due soluzioni

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)_{-} = \frac{a}{2G^2M^2 + a^2}, \quad \left(\frac{d\phi}{dt} \right)_{+} = 0; \quad (68)$$

la prima è un fotone che si muove nella stessa direzione di rotazione del buco nero, visto che ha lo stesso segno di $a = J/M$, e la seconda è un fotone che tenta di muoversi in direzione

opposta, ma che resta fermo. Siccome una particella massiva si muove più lentamente di un fotone essa verrà inesorabilmente trasportata nella direzione di rotazione; ciò non significa comunque che si debba cadere nel buco, anzi è possibile uscire dall'ergosfera senza problemi. A questo punto si può definire la velocità angolare dell'orizzonte come la minima velocità angolare che una particella può avere all'orizzonte:

$$\Omega_H := \left(\frac{d\phi}{dt} \right)_- (R_H^+) = \frac{a}{(R_H^+)^2 + a^2}, \quad (69)$$

ed è semplice verificare che la superficie a cui $\partial_t + \Omega_H \partial_\phi$ diventa nullo corrisponde proprio all'orizzonte degli eventi.

Riferimenti bibliografici

- [1] S. M. Carroll, “Lecture notes on general relativity,” arXiv:gr-qc/9712019.
- [2] S. M. Carroll, “Spacetime and geometry: An introduction to general relativity,” *San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004) 513 p*