Cosa misura un voltmetro in un circuito a corrente indotta

Marco Bonvini

15 luglio 2003

1 Cosa misura un voltmetro

Per stabilire cosa misura un voltmetro in un circuito a corrente indotta occorre far mente locale su cosa misura un voltmetro in generale. Siamo abituati a considerare la seconda legge di Kirchhoff e di coseguenza a vedere i circuiti come un insieme di resistenze e generatori di tensione collegati da fili a resistenza nulla, cosicché la differenza di potenziale tra due punti A e B è la somma delle cadute di tensione sulle resistenze (iR) meno le cadute di tensione sui generatori (f), calcolate dal punto A al punto B lungo un tragitto possibile del circuito. In realtà questa è un po' una approssimazione: la questione è che si calcola tra i punti A e B, lungo uno dei tragitti, l'integrale

$$\Delta V_{A-B} = \int_A^B \overrightarrow{E_c} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Con ciò si spiega anche perché i generatori vanno contati al negativo: se in tutto il circuito il campo $\overrightarrow{E_c}$ ha il verso della corrente, all'interno del generatore ha verso opposto, in modo tale che

$$\oint \overrightarrow{E_c} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

Ma allora perché la corrente circola? La risposta sta nel generatore: sovrapposto ad $\overrightarrow{E_c}$ c'è un altro campo elettrico $\overrightarrow{E_m}$ non conservativo detto campo elettromotore; questo campo ha verso opposto ad $\overrightarrow{E_c}$ (e lo stesso della corrente) e sommato ad esso dà un campo complessivo $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_c} + \overrightarrow{E_m}$ che ha ancora il verso di $\overrightarrow{E_m}$. Questi campi hanno la seguente proprietà:

$$\oint \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl} = \oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = f$$

2 Forza elettromotrice indotta

Se a generare una tensione non è un generatore ma un flusso magnetico variabile le cose si complicano; ma non troppo. Intanto occorre distinguere due casi: circuito in deformazione o campo magnetico variabile.

2.1 Circuito in deformazione

Ipotizziamo un campo magnetico costante nel tempo e un circuito aperto a forma di U posizionato in modo tale che il flusso magnetico attraverso quel circuito (se venisse chiuso agli

estremi) sia non nullo. Se si chiude il circuito con una sbarretta libera di muoversi strisciando sui lati della U, nel momento in cui questa si muove su ciascun elettrone di conduzione al suo interno agisce una forza di Lorentz che crea una differenza di potenziale f ai capi della sbarretta. A questo punto, se si tratta la sbarretta come il generatore di tensione del caso precedente il problema è del tutto analogo, nel tratto della U.
Però in questo caso è possibile misurare la differenza di potenziale anche tra due punti A e B della sbarretta: che succede? Semplicemente basta calcolare ancora

$$\int_A^B \overrightarrow{E_c} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Il punto è: come posso conoscere $\overrightarrow{E_c}$? In questo caso si conosce $\overrightarrow{E_m} = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$ dove $\overrightarrow{v}$ è la velocità della sbarretta, $\overrightarrow{B}$ il campo magnetico e $\overrightarrow{u}$ il versore della sbarretta. Anche $\overrightarrow{E}$ si può ricavare, tenedo conto che la corrente, quando scorre, è stazionaria (o quasi stazionaria) e quindi uguale in ogni punto del circuito, da cui si può risalire alla densità di corrente $\overrightarrow{J}$ e quindi ad $\overrightarrow{E} = \rho\overrightarrow{J}$ (ρ è la resistività). Ora si ricava che $\overrightarrow{E_c} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{E_m}$.

2.2 Campo magnetico variabile

Questo è il caso più interessante, ed è quello che mi ha spinto a pensare a tutto ciò. Si abbia un circuito indeformabile di forma qualunque (ad esempio un filo di rame chiuso), immerso in un campo magnetico $\overrightarrow{B}$ variabile. Nello spazio si genera un campo elettrico $\overrightarrow{E_B}$ dato da

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E_B} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

Si dia una parametrizzazione $\Gamma(\tau)$ alla curva del circuito, con $\overrightarrow{u}_{(\tau)}$ versore della tangente alla curva in ogni punto con verso uguale a quello della corrente indotta. Il campo elettromotore $\overrightarrow{E_m}$ sarà dipendente da $\overrightarrow{E_B}$ come

$$\overrightarrow{E_m} = (\overrightarrow{E_B} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$$

Ora, per lo stesso ragionamento di prima sulla stazionarietà della corrente i, si deve avere

$$\frac{f}{R_{tot}} = i = \iint_S \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{dS} = costante$$

dove f è la forza elettromotrice indotta, R_{tot} è la resistenza totale del circuito, $S = S_{(\tau)}$ una sezione del filo di rame e $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{J}_{(\tau)}$ il vettore densità di corrente. Si ha quindi che in ogni punto del circuito $\overrightarrow{E}_{(\tau)}$ è dato da

$$\overrightarrow{E} = \rho\overrightarrow{J} = \frac{f}{R_{tot}} \frac{\rho_{(\tau)}}{S_{(\tau)}} \overrightarrow{u}_{(\tau)}$$

A questo punto si può calcolare $\overrightarrow{E_c}$ e quindi la differenza di potenziale tra A e B è

$$\Delta V_{A-B} = \int_A^B (\overrightarrow{E} - \overrightarrow{E_m}) \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B \left[\frac{f}{R_{tot}} \frac{\rho_{(\tau)}}{S_{(\tau)}} - \overrightarrow{E_B} \cdot \overrightarrow{u}_{(\tau)} \right] \overrightarrow{u}_{(\tau)} \cdot \overrightarrow{dl}$$

lungo un qualunque percorso del circuito.

3 Conclusione

La forma scritta qua sopra per la differnza di potenziale riguarda il caso particolare di campo magnetico variabile. Se però si fa un passo indietro e la si scrive come

$$\Delta V_{A-B} = \int_A^B \left[\frac{f}{R_{tot}} \frac{\rho_{(\tau)}}{S_{(\tau)}} \overrightarrow{u}_{(\tau)} - \overrightarrow{E_{m(\tau)}} \right] \cdot \overrightarrow{dl}$$

si ha la formula più generale, in cui rientrano tutti i casi precedenti.

Si può vedere come, ad esempio, si arrivi alla soluzione per il caso di semplice circuito con generatore e resistenze. In tal caso, presi due punti A e B, si può scegliere per semplicità di calcolare l'integrale lungo il ramo in cui non è presente il generatore. Perciò si ha che $\overrightarrow{E_m}$ in quel tratto è sempre 0 e la formula diventa

$$\Delta V_{A-B} = \frac{f}{R_{tot}} \int_A^B \frac{\rho_{(\tau)}}{S_{(\tau)}} \overrightarrow{u}_{(\tau)} \cdot \overrightarrow{dl} = i \int_A^B \frac{\rho_{(\tau)}}{S_{(\tau)}} dl = iR_1$$

nel caso in cui si sia scelto il punto A a potenziale minore (nel caso opposto si avrebbe $\overrightarrow{u}_{(\tau)} \cdot \overrightarrow{dl} = -dl$). R_1 è la resistenza totale del tratto.
Questo deve essere uguale all'integrale calcolato lungo il percorso opposto e si ha

$$\Delta V_{A-B} = -\int_A^B \overrightarrow{E_{m(\tau)}} \cdot \overrightarrow{dl} + \frac{f}{R_{tot}} \int_A^B \frac{\rho_{(\tau)}}{S_{(\tau)}} \overrightarrow{u}_{(\tau)} \cdot \overrightarrow{dl} = f - i \int_A^B \frac{\rho_{(\tau)}}{S_{(\tau)}} dl = f - iR_2$$

Si vede subito che, essendo $R_{tot} = R_1 + R_2$ e $i = \frac{f}{R_{tot}}$, i due risultati coincidono.