

Esercitazione 25

Marco Bonvini

31 Maggio 2017

1 La palla, il proiettile e il gradino

Una palla di raggio $R = 80\text{cm}$ e massa $M = 6.0\text{kg}$ si trova in quiete su un piano liscio. Un proiettile di massa $m = 60\text{g}$ viene sparato orizzontalmente con velocità v , alla quota del centro della palla. Esso colpisce la palla e vi si conficca dentro, fino a raggiungerne esattamente il centro.

1. Assumendo $v = v_0 = 120\text{m/s}$, determinare la velocità del sistema dopo l'urto.
2. Assumendo sempre $v = v_0$, determinare la percentuale di energia dissipata nell'urto.
3. Se la palla incontra un gradino di altezza $h = 15\text{cm}$, ed impatta su di esso in modo anaelastico tale che il punto della palla che tocca lo spigolo del gradino resta fermo, qual'è il valore minimo v_1 di v affinché la palla salga sopra il gradino?
4. Cosa cambia se nel tratto tra la posizione iniziale della palla e il gradino (distanti $d = 1.2\text{m}$) vi è attrito con coefficiente dinamico $\mu = 0.1$?

[Sol: 1. $V_0 = \frac{m}{m+M}v_0 = 1.2\text{m/s}$; 2. $K_{\text{in}} = \frac{1}{2}mv_0^2 = 0.43\text{kJ}$, $K_0 = \frac{m}{m+M}K_{\text{in}} = 4.3\text{J}$, $\Delta K/K_{\text{in}} = \frac{M}{m+M} = 99\%$; 3. $v \geq \frac{R\sqrt{2gh(m+M)(m+7M/5)}}{m(R-h)} = 2.5 \cdot 10^2\text{m/s}$ e l'energia dissipata nell'urto è il 53%; 4. La palla comincia a rotolare strisciando e rallentando. La velocità diminuisce come $V = V_0 - g\mu t$ e la velocità angolare aumenta come $\omega = -\frac{7(m+M)}{2MR}g\mu t$. Dopo un tempo $t = \frac{V_0}{g\mu} \frac{2M}{5m+7M}$ si ha $V = -\omega R = V_0 \frac{m+M}{m+7M/5}$ e la palla rotola senza strisciare. Questo avviene dopo aver percorso $x = V_0 t - \frac{1}{2}g\mu t^2$. Assumiamo che questo spazio sia minore di $d - \sqrt{2Rh - h^2}$, e verificheremo dopo se l'assunzione è corretta. Sotto questa assunzione, il moto di puro rotolamento inizia prima di raggiungere il gradino. Nel transire al moto di puro rotolamento vi è un'ulteriore perdita di energia $K_1 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}I_C\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{m+M}{m+7M/5}K_0 = 0.72K_0$ rispetto a quella immediatamente dopo l'urto del proiettile. Tuttavia la palla ha iniziato a ruotare, quindi è agevolata nella salita. Imponendo la conservazione del momento angolare nell'urto col gradino, e richiedendo sufficiente energia per salire, si trova $\frac{1}{2}I_O\left(\frac{(m+M)(R-h)+I_C/R}{I_O}V\right)^2 \geq (m+M)gh$, con $I_O = (m+M)R^2 + I_C = (m+7M/5)R^2$. Sostituendo le espressioni di V in funzione di V_0 in funzione di v , si trova $v \geq \frac{R(m+7M/5)\sqrt{2gh(m+M)(m+7M/5)}}{m[R(m+7M/5)-h(m+M)]} = 2.4 \cdot 10^2\text{m/s}$. Notare che la velocità richiesta quando c'è attrito è paradossalmente minore che nel caso senza attrito. Il motivo è che, sebbene l'attrito dissipi energia, l'energia dissipata nell'urto della palla col gradino è minore, visto che in questo caso arriva già rotolando.]