Esercitazione 26

Marco Bonvini

1 Giugno 2017

1 Pallina giù per le scale

Una palla viene lanciata con velocità $v_0 = 3.0$m/s su una scala a gradini con inclinazione θ rispetto all'orizzontale. I gradini sono tutti uguali, lunghi $b = 60$cm e alti $h = 20$cm. Fra pallina e gradini non vi è attrito. Supponendo che il primo rimbalzo avvenga sul bordo del primo gradino e che gli urti siano elastici, determinare:

1. l'espressione della posizione di impatto della palla sul secondo gradino in funzione di θ, e verificare che per $\theta = \theta_0 = 75°$ tale posizione sia all'interno del gradino;
2. il tempo che intercorre tra il primo e il secondo rimbalzo per $\theta = \theta_0$;
3. sempre per $\theta = \theta_0$, la velocità v_3 immediatamente dopo il secondo rimbalzo.
4. Assumendo adesso che ogni rimbalzo sia parzialmente anaelastico, quale/i valore/i dell'angolo θ garantisce che la pallina scenda la scala rimbalzando su tutti i gradini? Quanta energia viene dissipata ad ogni rimbalzo?

[Sol: 1. $x(t_1) = \frac{v_0^2 \cos\theta}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}}\right) \overset{\theta=\theta_0}{=} 0.51\text{m} > b$; 2. $t_1 = \frac{v_0}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}}\right) \overset{\theta=\theta_0}{=} 0.65\text{s}$; 3. $v_{3x} = v_x = v_0\cos\theta$, $v_{3y} = v_0\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}}\right)$, $|v_3| = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 3.6\text{m/s}$; 4. Affinché la pallina rimbalzi su tutti i graditi, il cui numero non è dato ed è quindi arbitrariamente grande, è necessario che lo spazio orizzontale percorso ad ogni rimbalzo sia pari a b. Essendo v_x sempre costante, questo implica che v_y ad ogni rimbalzo ha sempre la stessa forma funzionale, in particolare immediatamente dopo il rimbalzo $v_y = \frac{bg}{2v_x} - \frac{hv_x}{b}$ e immediatamente prima del rimbalzo successivo $v'_y = -\frac{bg}{2v_x} - \frac{hv_x}{b}$. Imponendo $v'_y = v_{0y}$, si trova il sistema $\cos\theta\sin\theta - \frac{h}{b}\cos^2\theta = \frac{bg}{2v_0^2}$. Con un po' di trigonometria si può scrivere $\cos\theta\sin\theta - \frac{h}{b}\cos^2\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}[\cos(2\theta+\phi) + \cos\phi]$ con $\phi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}}$. Per i valori dati, si trovano due soluzioni $\theta_1 = 1.13$rad e $\theta_2 = 0.77$rad. Siccome i rimbalzi sono tutti uguali, ad ogni rimbalzo viene persa l'energia potenziale acquisita, ovvero mgh. L'anaelasticità del rimbalzo è quindi $\alpha \equiv K'/K = \frac{v_0^2}{v_0^2+2gh} = 0.70$.]