Esercitazione 7 e 8

Marco Bonvini

12 Aprile 2017

1 Pallina in semisfera

Una pallina di massa m e dimensioni trascurabili può scorrere senza attrito sulla parete interna di una semisfera di raggio $r = 15$cm, fissata a un piano tale che il piano aperto sia orizzontale (e ovviamente rivolto verso l'alto). Nell'istante iniziale, la pallina ha una velocità *orizzontale* e tangente alla parete, e la sua posizione è definita da un angolo $\theta_0 = 60°$ rispetto alla verticale. Si determini:

1. il valore v_0 della velocità iniziale per il quale la pallina non varia la sua quota durante il moto;
2. il momento totale $\vec{\tau}_O$ delle forze che agiscono sulla pallina nel corso di un moto per θ generico rispetto al centro O della (semi)sfera;
3. il valore minimo $v_{\min}$ della velocità iniziale necessario affinché la pallina raggiunga il bordo superiore della semisfera.

[Sol: 1. $v_0 = \sqrt{rg \sin\theta_0 \tan\theta_0} = 1.5$m/s; 2. $\tau = rmg \sin\theta$ diretto tangenzialmente alla sfera e giacente nel piano ortogonale all'asse z; 3. $v_{\min} = \sqrt{2gr/\cos\theta_0} = 2.4$m/s (usando conservazione dell'energia e del momento angolare lungo z)]

2 Guida con molla

Una massa m si può muovere lungo una guida fissa agli estremi, priva di attrito, inclinata a formare un angolo θ con il piano orizzontale, con $\tan\theta = 1/2$. La massa è connessa ad un estremo di una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla. L'altro estremo della molla è connesso ad un punto B fisso. All'inizio la massa si trova nel punto A, alla stessa quota di B (la molla è orizzontale), con velocità nulla. La distanza tra A e B è $d = 50$cm.

1. Si calcoli il valore k della costante elastica della molla sapendo che se la massa vale $m = m_0 = 80$g essa si trova in equilibrio in A.
2. Si calcoli il valore $m = m_1 < m_0$ affinché questa massa raggiunga il punto C, posizionato sulla guida esattamente sopra a B, con velocità nulla.
3. Si scriva l'energia potenziale del sistema in funzione dei parametri e della coordinata x lungo la guida (con $x_A = 0$), e la forza risultante lungo la direzione della guida.
4. Si discuta il moto della massa m.

[Sol. 1. $k = (m_0 g/d)\tan\theta = 0.78$N/m; 2. $m_1 = \frac{kd}{2g}\frac{1-\tan^2\theta}{\tan\theta} = m_0\frac{1-\tan^2\theta}{2} = \frac{3}{8}m_0 = 30$g; 3. $U(x) = mgx\sin\theta + \frac{1}{2}k(d^2 + x^2 - 2dx\cos\theta)$, $F_x = -k(x - x_0)$, $x_0 = d\cos\theta - \frac{mg}{k}\sin\theta = \frac{5}{8}d\cos\theta$; 4. Moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{4g}{3d}}$ centrato in x_0]

3 Pendolo rotante

Una sbarra di massa trascurabile e lunghezza ℓ è imperniata a un piatto appeso al soffitto. La sbarra può ruotare sul perno in una sola direzione, formando un angolo θ con la verticale. Sull'altra estremità della sbarra è appesa una pallina di massa m. Il piatto ruota con velocità angolare costante ω.

1. Si calcoli la velocità angolare minima ω_0 in grado di sollevare la pallina rispetto alla sua posizione più bassa possibile ($\theta = 0$).

2. Considerando $\omega < \omega_0$, descrivere il moto della pallina se all'istante $t = 0$ la fune forma un angolo $\theta_0 \ll 1$ con la verticale.

3. Considerando $\omega > \omega_0$, descrivere il moto della pallina se essa viene perturbata di un angolo $\phi_0 \ll 1$ rispetto all'angolo di moto uniforme.

Si discuta il ruolo della forza di Coriolis.

[Sol: 1. $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$; 2. Nel limite considerato l'equazione del moto è $\ddot{\theta} \simeq -(\omega_0^2 - \omega^2)\theta$, quindi si comporta come un pendolo che oscilla con pulsazione $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$; 3. L'equazione del moto è $\ddot{\phi} \simeq -\omega^2\left(1 - \omega_0^4/\omega^4\right)\phi$, quindi oscilla attorno alla posizione di equilibrio con pulsazione $\Omega = \omega\sqrt{1 - \omega_0^4/\omega^4}$]