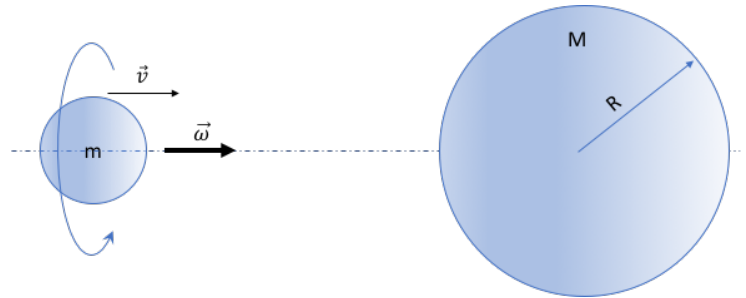


Esercizio n. 1

In un esperimento in orbita (accelerazione gravitazionale trascurabile) una goccia sferica di Mercurio (densità = ρ), di massa M , ferma rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, viene colpita centralmente da un'altra goccia di mercurio avente massa m e velocità \vec{v} , in rotazione attorno ad un asse parallelo alla direzione del moto e con il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ orientato nel verso del moto.

Nel processo d'urto le gocce si fondono in un'unica goccia di massa $M' = M + m$, anche essa sferica, che prosegue il suo moto con velocità \vec{v}' ruotando con velocità angolare $\vec{\omega}'$. L'urto è da intendersi totalmente anelastico. Calcolare:

1. raggio r e momento d'inerzia I_m della goccia di massa m in moto prima dell'urto
2. raggio R' e momento d'inerzia I' della goccia di massa M' formatasi con l'urto
3. modulo e direzione della velocità \vec{v}' , dopo l'urto, della goccia di massa M'
4. modulo e direzione del vettore velocità angolare, $\vec{\omega}'$, della goccia di massa M'
5. l'energia dissipata durante l'urto



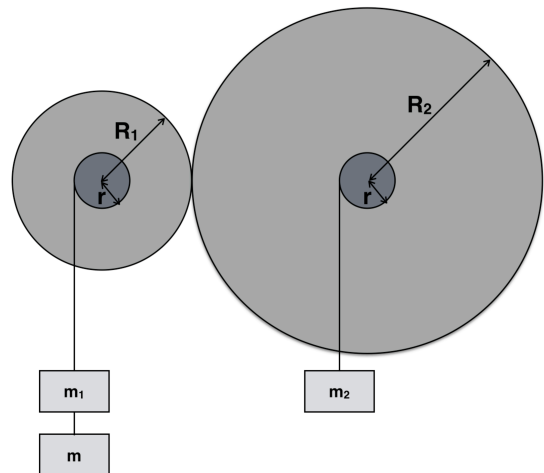
Dati numerici : $M = 10.0 \text{ g}$; $m = 1.0 \text{ g}$; $|\vec{v}| = 1.0 \text{ m s}^{-1}$; $|\vec{\omega}| = 1.0 \text{ rad s}^{-1}$; $\rho = 13.58 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Esercizio n. 2

Il sistema in figura è costituito da due dischi omogenei di raggi R_1 e R_2 e massa pari a M_1 e M_2 , rispettivamente. Essi possono ruotare senza attrito attorno a due assi fissi orizzontali, paralleli e passanti per i loro centri di massa grazie a due perni che li sostengono. Tra i due dischi vi è attrito, che permette loro di ruotare a contatto l'uno dell'altro senza slittare.

Su ciascuno dei dischi è fissato un rocchetto di massa trascurabile e raggio r su cui è avvolto un filo inestensibile e di massa trascurabile. Al filo del disco 1 sono appese due masse, m_1 e m , collegate fra loro tramite un altro filo, sempre inestensibile e di massa trascurabile. Al filo del disco 2 è appesa la massa m_2 .

1. Calcolare il valore della massa m affinché il sistema sia in equilibrio. Sempre all'equilibrio, calcolare la forza di attrito che si scambiano i due dischi.
2. Di nuovo all'equilibrio, calcolare le reazioni vincolari V_1 e V_2 che i perni esercitano sui due dischi.
3. A un certo istante il filo che collega m al disco 1 viene tagliato. Calcolare l'accelerazione di m_2 e la tensione del filo che lega m_2 al disco 2.



Dati numerici: $R_1 = 10,0 \text{ cm}$; $R_2 = 20,0 \text{ cm}$; $M_1 = 1,0 \text{ kg}$; $M_2 = 4,0 \text{ kg}$; $r = 3,0 \text{ cm}$; $m_1 = 1,0 \text{ kg}$; $m_2 = 3,0 \text{ kg}$

Soluzione esercizio 1:

1. Il volume della goccia di massa m in moto può essere calcolato dividendo la massa per la densità del mercurio: $V_m = \frac{m}{\rho}$. Invertendo la relazione $V_m = \frac{m}{\rho} = \frac{4}{3}\pi r^3$ si ottiene

$$r = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.260 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Di conseguenza il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro sarà $I_m = \frac{2}{5}mr^2 = \frac{2}{5}m^{\frac{5}{3}}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}} = 2.70 \cdot 10^{-9} \text{ kg m}^2$.

2. Le gocce sono del medesimo materiale e di densità costante, quindi il volume della nuova goccia sarà la somma dei volumi prima dell'urto.

Procedendo analogamente a quanto già fatto calcoliamo il raggio della nuova goccia

$$R' = \left(\frac{3(m+M)}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.578 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

ed il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse centrale è $I' = \frac{2}{5}(m+M)R'^2 = \frac{2}{5}(m+M)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}} = 147 \cdot 10^{-9} \text{ kg m}^2$.

3. Nell'istante dell'urto non sono presenti forze impulsive pertanto si conserva la quantità di moto totale del sistema. Le due masse si scambiano un impulso lungo la congiungente i loro centri, retta su cui giace anche la velocità iniziale \vec{v} . Per la conservazione della quantità di moto totale la velocità finale \vec{v}' sarà uguale alla velocità del centro di massa prima dell'urto $\vec{v}' = \vec{v}_{CM} = \frac{m}{m+M}\vec{v}$ e pertanto sarà parallela e di verso concorde con \vec{v} .

Il modulo $|\vec{v}'| = 9.09 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$.

4. Nell'istante dell'urto non sono presenti momenti di forze impulsive pertanto si conserva il momento della quantità di moto rispetto alla direzione di volo del proiettile che coincide con il suo asse di rotazione. Pertanto possiamo scrivere $I_m\vec{\omega} = I'\vec{\omega}'$. Da tale relazione ricaviamo intanto che il vettore $\vec{\omega}'$ è parallelo ed ha lo stesso verso di $\vec{\omega}$. Possiamo

anche calcolarne il modulo $|\vec{\omega}'| = \frac{I_m}{I'}|\vec{\omega}| = \left(\frac{m}{m+M}\right)^{\frac{5}{3}}|\vec{\omega}| = 1.84 \cdot 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}$.

5. Nell'urto totalmente anelastico una parte dell'energia è dissipata dalle forze d'attrito interne. L'energia dissipata è data da:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_m\omega^2 - \frac{1}{2}(m+M)v'^2 - \frac{1}{2}I'\omega'^2 = 0.454 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Soluzione esercizio 2:

1. Possiamo scrivere la seconda equazione cardinale per i seguenti due sistemi: il primo è costituito dal disco 1 e dalle masse m_1 ed m , mentre il secondo dal disco 2 e dalla massa m_2 . Come poli possiamo usare i punti in cui gli assi di rotazione intersecano il piano dei dischi. All'equilibrio si ottiene

$$\begin{cases} (m+m_1)gr - f_a R_1 = 0 \\ m_2 gr - f_a R_2 = 0 \end{cases} \quad \text{esplicitando } m \text{ e } f_a \text{ si ottiene}$$

$$m = \frac{R_1}{R_2}m_2 - m_1 = 0.500 \text{ kg}$$

$$f_a = \frac{m_2 g r}{R_2} = 4.41 \text{ N}$$

2. Per calcolare le reazioni vincolari e la forza di attrito scriviamo la prima equazione cardinale per i due dischi

$$\begin{cases} V_1 - (m + m_1 + M_1)g - f_a = 0 \\ V_2 - (m_2 + M_2)g + f_a = 0 \end{cases} \quad \text{esplicitando } V_1, V_2 \text{ si ottiene}$$

$$\begin{cases} V_1 = (m + m_1 + M_1)g + f_a = 28.9 \text{ N} \\ V_2 = (m_2 + M_2)g - f_a = 64.3 \text{ N} \end{cases}$$

3. Per calcolare l'accelerazione del sistema usiamo le stesse equazioni del punto 1 con accelerazione diversa da zero, senza m.

$$\begin{cases} m_1 g r - f_a R_1 = I_{tot1} \dot{\omega}_1 \\ m_2 g r - f_a R_2 = I_{tot2} \dot{\omega}_2 \end{cases}$$

Poiche' i dischi rotolano senza strisciare e sono legati all'accelerazione della massa 2 valgono le seguenti relazioni

$$\theta_1 R_1 = -\theta_2 R_2 \Rightarrow \dot{\omega}_1 R_1 = -\dot{\omega}_2 R_2 \quad ; \quad x_2 = \theta_2 r \Rightarrow a_2 = a = \dot{\omega}_2 r$$

Combinando si ottiene

$$\begin{cases} m_1 g r - f_a R_1 = -I_{tot1} a R_2 / (R_1 r) \\ m_2 g r - f_a R_2 = I_{tot2} a / r \end{cases}$$

Eliminando f_a si ottiene

$$\left(\frac{m_2}{R_2} - \frac{m_1}{R_1} \right) g r = \left(I_{tot1} \frac{R_2}{R_1^2 r} + I_{tot2} \frac{1}{R_2 r} \right) a$$

da cui

$$a = \left(\frac{m_2}{R_2} - \frac{m_1}{R_1} \right) g r / \left(I_{tot1} \frac{R_2}{R_1^2 r} + I_{tot2} \frac{1}{R_2 r} \right)$$

I momenti di inerzia I_{tot1} e I_{tot2} valgono

$$I_{tot1} = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 + m_1 r^2 = 5.90 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$I_{tot2} = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 + m_2 r^2 = 8.27 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

A questo punto possiamo ricavare l'accelerazione

$$a = 8.31 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

La tensione si ricava dal secondo principio della dinamica relativo alla massa m_2

$$-\tau + m_2 g = m_2 a \quad \text{da cui}$$

$$\tau = m_2 (g - a) = 29.2 \text{ N}$$