Esercitazione 35 e 36

Marco Bonvini

12 Giugno 2018

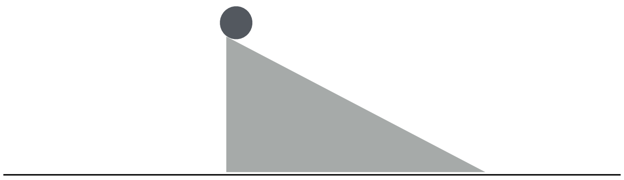
1 Cilindro su piano inclinato che scivola sul piano

Un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale di massa $M = 6.0$kg appoggia senza attrito su un tavolo orizzontale liscio. Il sistema è inizialmente a riposo. In cima al piano inclinato (alto $h = 25$cm) viene appoggiato un cilindro di massa $m = 2.0$kg e raggio $r = 3$cm. Tra cilindro e piano inclinato vi è sufficiente attrito da non permettere strisciamento. Al tempo $t = 0$ il cilindro viene lasciato libero di muoversi. Determinare:

1. la velocità del cilindro quando raggiunge il tavolo;
2. lo spostamento orizzontale del cilindro quando raggiunge il tavolo;
3. il tempo impiegato dal cilindro a raggiungere il tavolo.

Assumendo che il cilindro mantenga la componente orizzontale della velocità quando comincia a scivolare sul tavolo, si determini

4. la perdita di energia del cilindro nell'istante del contatto col tavolo orizzontale.



[Soluzione:
1. La velocità relativa $v_{\rm rel}$ del cilindro rispetto al piano inclinato è legata alla velocità di rotazione del cilindro dalla relazione di puro rotolamento $v_{\rm rel} = -r\omega > 0$. La velocità del cilindro nel sistema inerziale è data da

$$\begin{aligned} v_x &= V + v_{\rm rel}\cos\theta = V - r\omega\cos\theta \\ v_y &= -v_{\rm rel}\sin\theta = r\omega\sin\theta. \end{aligned}$$

Dalla conservazione della quantità di moto lungo x si ha $mv_x + MV = 0$ da cui

$$V = \frac{m}{M+m} r\omega\cos\theta.$$

Dalla conservazione dell'energia $mgh' = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ si trova

$$\omega = -\sqrt{\frac{8gh'}{3r^2}\frac{M+m}{2M+m}} = -6.4\text{rad/s},$$

dove $h' = h - r(1-\cos\theta) = 24.6$cm. Segue

$$v_x = -\frac{M}{M+m} r\omega\cos\theta = 12\text{m/s}$$

$$v_y = r\omega \sin\theta = -9.6\text{m/s},$$

con modulo $v = 16\text{m/s}$.

2. Dalla conservazione della quantità di moto lungo x, che inizialmente è nulla, segue che il centro di massa componente x non si sposta. Allora si trova immediatamente lo spostamento del cilindro:

$$\Delta x = \frac{M}{M+m} b$$

dove b è la lunghezza orizzontale del piano inclinato percorsa dal cilindro, ovvero $b = h'/\tan\theta$, da cui segue

$$\Delta x = \frac{M}{M+m}\frac{h'}{\tan\theta} = 32\text{cm}.$$

3. Dalla conservazione dell'energia generalizzata ad un istante generico, possiamo scrivere (manipolando l'equazione per ω qui sopra)

$$v_y(t)^2 = \frac{2g(h' - y(t))}{3}\frac{M+m}{2M+m}.$$

Derivando rispetto al tempo si trova

$$\dot{v}_y(t) = -\frac{g}{3}\frac{M+m}{2M+m}$$

da cui

$$v_y(t) = -\frac{g}{3}\frac{M+m}{2M+m} t.$$

Eguagliando questa espressione al valore della velocità finale si trova il tempo $t = 5.1\text{s}$.

4. Non essendoci attrito tra il tavolo e il cilindro, esso continua a ruotare con la stessa velocità angolare. Perciò l'unica perdita di energia cinetica è quella legata alla componente verticale della velocità:

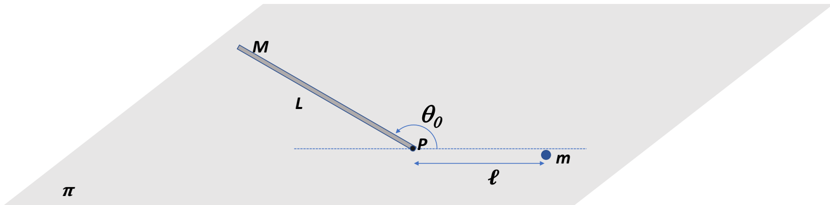
$$\Delta K = -\frac{1}{2} m v_y^2 = -92\text{J}.$$

La perdita percentuale di energia è $\Delta K/K_{\text{cil}} = -21\%$.]

Corso Meccanica – Anno Accademico 2017/18 – Secondo compito d'esonero - 11/06/2018

Esercizio n. 1

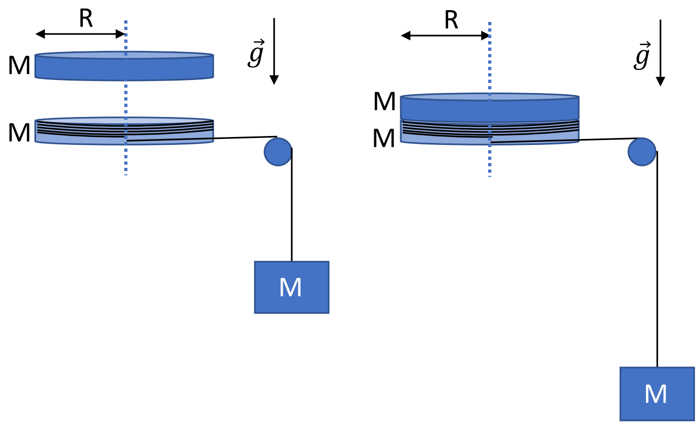
Una sbarretta di massa M e lunghezza L è vincolata a ruotare intorno ad un perno P posto in uno dei due estremi di essa, senza attrito e sul piano orizzontale π. La sbarretta si comporta come un pendolo di torsione, è soggetta cioè ad un momento di richiamo $k\theta(t)$, dove k è la costante elastica e $\theta(t)$ è l'angolo rispetto alla posizione di equilibrio della sbarretta.
La sbarretta viene caricata, portandola alla posizione iniziale di $\theta_0 = 150°$. Quindi viene lasciata libera di ruotare. Quando la sbarretta giunge alla posizione $\theta = 0°$, essa colpisce con un urto elastico una massa puntiforme di massa m, ferma, posta ad una distanza ℓ dal perno. Calcolare:



1. La velocità angolare della sbarretta immediatamente prima dell'urto
2. La velocità angolare della sbarretta e la velocità della massa m dopo l'urto
3. L'impulso trasmesso dal perno alla sbarretta durante l'urto
4. L'ampiezza delle oscillazioni della sbarretta successive all'urto.

[$\boldsymbol{m}$=2.0kg; $\boldsymbol{M}$=1.0kg; $\boldsymbol{k}$=10^3 Nm; $\boldsymbol{L}$=30cm; $\boldsymbol{\ell}$=20cm]

Esercizio n. 2



Un disco omogeneo di massa M e raggio R è disposto in orizzontale e può ruotare senza attrito intorno ad un asse passante per il suo centro di massa. Un filo inestensibile e di massa trascurabile è avvolto intorno al disco e tramite una carrucola è collegato ad un corpo, anche esso di massa M, che può scendere sotto l'azione del suo peso. Durante il moto il filo non striscia sulla superficie del disco. Al tempo t=0 la massa M comincia a scendere.
Al tempo $t=t_1$ un secondo disco identico al precedente ad esso coassiale ed inizialmente fermo è accostato a questo in modo che tra i due si sviluppi una forza di attrito di momento costante τ. Al tempo $t=t_2$ i due dischi ruotano con la stessa velocità angolare.
Si determini:

1) L'accelerazione della massa M per $t<t_1$.
2) La velocità angolare del primo disco al tempo t_1
3) Di quanto è sceso il peso M al tempo t_1
4) Il modulo del momento τ delle forze di attrito tra i due dischi, affinché nell'intervallo di tempo tra t_1 e t_2 il primo disco ruoti a velocità angolare costante.
5) Nelle condizioni indicate nella domanda 4 calcolare il tempo t_2 a partire dal quale i due dischi ruotano con la stessa velocità angolare.

[$\boldsymbol{M}$=2.5 kg, $\boldsymbol{R}$=48 cm, $\boldsymbol{t_1}$=1.5 s]