Esercitazione 18 e 19

Marco Bonvini

8 Maggio 2019

1 Riportare la catena sul tavolo

Una catena è trattenuta ad un estremo su un tavolo privo di attrito con un quarto della sua lunghezza che pende dal bordo. Se la catena è lunga ℓ ed ha massa m, quale è il lavoro W che occorre fare per portare sul tavolo la parte pendente della catena? Se invece c'è attrito con coefficiente dinamico μ, assumendo che la catena venga tirata orizzontalmente dall'estremo che poggia sul tavolo, quanto lavoro occorre fare per portarla completamente sul tavolo?

[Sol: Senza attrito $W = mg\ell/32$, con attrito $W = mg\ell(1 + 7\mu)/32$]

2 La scimmia

Una scimmia siede su un disco che può ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale passante per il centro e ortogonale al piano del disco. Sull'asse di rotazione, più in alto, vi è una ruota di bicicletta (di raggio $r = 35$cm e massa $m = 3$kg) libera di ruotare senza attrito attorno all'asse stesso. All'istante iniziale la ruota gira con velocità angolare $\omega_0 = 60$rad/s. La scimmia, improvvisamente, acchiappa la ruota e la ferma. Descrivere il moto, sapendo che il momento di inerzia complessivo del sistema disco-scimmia-ruota rispetto all'asse di rotazione è $I_{\text{tot}} = 2.0\text{kgm}^2$. L'energia si conserva?

[Sol: il sistema si muove rigidamente con velocità angolare $\omega = \omega_0 mr^2/I_{\text{tot}} = 0.18$rad/s. L'energia non si conserva]

3 Dimostrazioni

- Teorema di Huygens-Steiner, con un asse identificato da un punto $\vec{x}_n$ e un versore $\hat{n}$, usando come distanza dall'asse il modulo del vettore $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_n - [(\vec{x} - \vec{x}_n) \cdot \hat{n}]\hat{n}$.
- Teorema di Huygens-Steiner, usando come distanza dall'asse $|\vec{x}_\perp| = |(\vec{x} - \vec{x}_n) \wedge \hat{n}|$.
- Il tensore di inerzia I_{ij}, definito da $L_{\text{cm},i} = I_{ij}\omega_j$, che si trova quindi essere

  $$I_{ij} = \int dM\big[x'^2\delta_{ij} - x'_i x'_j\big],$$

  essendo $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}_{\text{cm}}$.
- La relazione tra tensore di inerzia e momento di inerzia, ottenuta assumendo l'asse parallelo a $\vec{\omega}$, ovvero $\vec{\omega} = \omega\hat{n}$, calcolando $\hat{n} \cdot \vec{L}_{\text{cm}} = I_{\text{cm},\hat{n}}\omega$, da cui

  $$I_{\text{cm},\hat{n}} = I_{ij}n_i n_j = \int dM\big[x'^2 - (\vec{x}' \cdot \vec{n})^2\big],$$

  che corrisponde alla definizione originale, ottenuta usando il vettore $\vec{x}_\perp$.