Esercitazione 26 e 27

Marco Bonvini

28 Maggio 2019

1 I dischetti

Un dischetto di raggio $R = 1.5\text{cm}$ e massa $m = 150\text{g}$ striscia su un piano senza attrito con velocità lineare costante $v_0 = 0.75\text{m/s}$ e con una velocità angolare attorno al suo asse $\omega_0 = 0.25\text{rad/s}$. Lungo la sua traiettoria, si trova un altro disco di massa M e con lo stesso raggio R, fermo. Il primo disco urta il secondo, con parametro d'impatto nullo.

1. Dopo l'urto il primo disco resta fermo. Determinare il moto del secondo disco dopo l'urto.
2. L'urto di cui sopra può davvero accadere? Motivare la risposta e spiegare cosa succederebbe davvero.
3. Assumendo che dopo l'urto il primo disco si muova con velocità ortogonale a quella iniziale, e che l'urto sia elastico, determinare il resto del moto (assumere $M = m$).
4. Assumendo che dopo l'urto il primo disco smetta di ruotare, e che l'urto sia elastico, determinare il resto del moto (assumere $M = m$).

[Sol: 1. $V_x = \frac{m}{M}v_0$, $V_y = 0$, $\Omega = \frac{m}{M}\omega_0$; 2. No, ovviamente: il primo disco girando imprime una forza che tende a far muovere il secondo disco in direzione ortogonale a quella del moto iniziale, e per reazione esso tende a muoversi in verso opposto, non potendo rimanere fermo. A meno che l'attrito tra i due dischi non sia completamente trascurabile, ma in tal caso il primo disco non smette di girare e il secondo non inizia a girare. 3. $V_y = -v_y = R\omega_0/3$, $V_x = v_0$, $\omega = \omega_0/3$, $\Omega = -2\omega_0/3$; 4. $V_y = -v_y = R\omega_0/2$, $V_x, v_x = v_0\frac{1\pm\sqrt{1-R^2\omega_0^2/v_0^2}}{2}$, $\Omega = -\omega_0$]

2 La palla, il proiettile e il gradino

Una palla di raggio $R = 80\text{cm}$ e massa $M = 6.0\text{kg}$ si trova in quiete su un piano liscio. Un proiettile di massa $m = 60\text{g}$ viene sparato orizzontalmente con velocità v, alla quota del centro della palla. Esso colpisce la palla e vi si conficca dentro, fino a raggiungerne esattamente il centro.

1. Determinare la velocità del sistema dopo l'urto rispetto a quella del proiettile.
2. Determinare la percentuale di energia dissipata nell'urto.
3. Se la palla incontra un gradino di altezza $h = 15\text{cm}$, ed impatta su di esso in modo anaelastico tale che il punto della palla che tocca lo spigolo del gradino resta fermo, qual'è il valore minimo di v affinché la palla salga sopra il gradino? Quanta energia viene dissipata?
4. Cosa cambia se nel tratto tra la posizione iniziale della palla e il gradino vi è attrito con coefficiente dinamico $\mu = 0.1$? Si assuma che la distanza tra la posizione iniziale della palla e il gradino sia sufficientemente grande.

[Sol: 1. $V_0/v = \frac{m}{m+M} = 0.010$; 2. $K_1/K_{\rm in} = \frac{m}{m+M} = 1.0\%$, $\Delta K/K_{\rm in} = \frac{M}{m+M} = 99\%$; 3. $v \geqslant \frac{R\sqrt{2gh(m+M)(m+7M/5)}}{m(R-h)} = 2.5\ 10^2$m/s. Definendo K_3 l'energia cinetica immediatamente dopo l'urto col gradino si ha $K_3/K_1 = 0.47$, ovvero l'energia dissipata è il 53%; 4. La palla comincia a rotolare strisciando e rallentando. La velocità diminuisce come $V(t) = V_0 - g\mu t$ e la velocità angolare aumenta come $\omega = -\frac{5(m+M)}{2MR} g\mu t$. Dopo un tempo $t = \frac{V_0}{g\mu}\frac{2M}{5m+7M}$ si ha $V = -\omega R = V_0 \frac{m+M}{m+7M/5}$ e la palla rotola senza strisciare. Questo avviene dopo aver percorso $x = V_0 t - \frac{1}{2} g\mu t^2$. Assumiamo che questo spazio sia minore della distanza tra la posizione iniziale e il gradino, come suggerito dal testo. Sotto questa assunzione, il moto di puro rotolamento inizia prima di raggiungere il gradino. Nel transire al moto di puro rotolamento vi è un'ulteriore perdita di energia $K_2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2} I_C \left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{m+M}{m+7M/5} K_0 = 0.72 K_0$ rispetto a quella immediatamente dopo l'urto del proiettile. Tuttavia la palla ha iniziato a ruotare, quindi è agevolata nella salita. Imponendo la conservazione del momento angolare nell'urto col gradino, e richiedendo sufficiente energia per salire, si trova $\frac{1}{2} I_O \left(\frac{(m+M)(R-h)+I_C/R}{I_O} V\right)^2 \geqslant (m+M)gh$, con $I_O = (m+M)R^2 + I_C = (m+7M/5)R^2$. Sostituendo le espressioni di V in funzione di V_0 in funzione di v, si trova $v \geqslant \frac{R(m+7M/5)\sqrt{2gh(m+M)(m+7M/5)}}{m[R(m+7M/5)-h(m+M)]} = 2.4\ 10^2$m/s. Notare che la velocità richiesta quando c'è attrito è paradossalmente minore che nel caso senza attrito. Il motivo è che, sebbene l'attrito dissipi energia, l'energia dissipata nell'urto della palla col gradino è minore, visto che in questo caso arriva già rotolando. Infatti, si ha $K_3/K_2 = \left[1 - \frac{h(m+M)}{R(m+7M/5)}\right]^2 = 0.75$, da cui si trova che $K_3/K_1 = 0.54$, ovvero l'energia finale è ridotta del 46% rispetto a quella che aveva immediatamente dopo l'urto col proiettile, ed è quindi maggiore di quella del caso senza attrito.]