Corso di Meccanica Analitica e Relativistica

Proff. M. Bonvini, A. Crisanti e L. Gualtieri

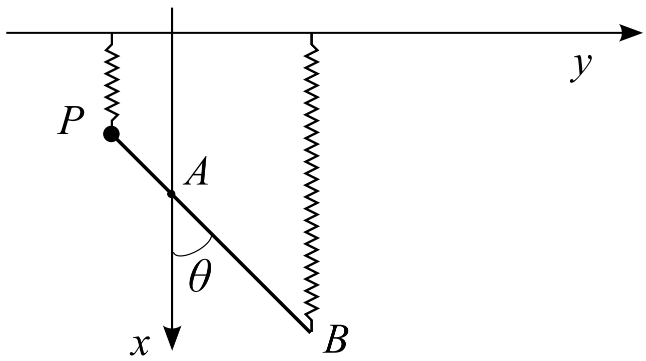
Prova in itinere del 02 Novembre 2021

Esercizio

Una sbarra di lunghezza $4a$, densità uniforme e massa M, può muoversi nel piano verticale con il punto A posto ad una distanza a da un estremo della sbarra vincolato a muoversi lungo l'asse x, diretto verticalmente ed orientato verso il basso, di un sistema di riferimento Oxy. All'estremità della sbarra più vicina al punto A è attaccata rigidamente una pallina P di dimensioni trascurabili e massa m. Entrambe le estremità della sbarra sono attaccate all'asse orizzontale y mediante due molle identiche di costante elastica k, massa trascurabile e lunghezza a riposo nulla. Le molle sono sempre parallele all'asse x. Tutto il sistema è soggetto alla forza peso.

Utilizzando come coordinate generalizzate la posizione x del punto A e l'angolo θ che la sbarra forma con la direzione positiva dell'asse x, ed orientato in senso antiorario, si chiede

1. La Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
2. Le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilità in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{4ka}$.
3. Fissati i valori $a = 1$, $k = 1$, $g = 1$, $M = 5$ ed $m = 5$, e scelta una configurazione di equilibrio stabile, determinare la frequenza delle piccole oscillazioni.



Es. 1

- **Risposte**

1) L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_{\rm P}^2 + \dot{y}_{\rm P}^2) + \frac{M}{2}(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2,$$

con $I = 4Ma^2/3$ momento d'inerzia della sbarra rispetto al centro di massa. Sostituendo

$$\begin{cases} x_{\rm P} &= x - a\cos\theta \\ y_{\rm P} &= -a\sin\theta \end{cases}; \qquad \begin{cases} x_{\rm G} &= x + a\cos\theta \\ y_{\rm G} &= a\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$T = \frac{1}{2}\Big[(m+M)\dot{x}^2 + (m+7M/3)a^2\dot{\theta}^2 + 2a(m-M)\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta}\Big].$$

L'energia potenziale del sistema è

$$\begin{aligned} V &= -Mgx_{\rm G} - mgx_{\rm P} + \frac{k}{2}x_P^2 + \frac{k}{2}x_{\rm B}^2 \\ &= -Mg(x + a\cos\theta) - mg(x - a\cos\theta) + \frac{k}{2}(x - a\cos\theta)^2 + \frac{k}{2}(x + 3a\cos\theta)^2. \end{aligned}$$

La Lagrangiana del sistema è quindi data da

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\Big[(m+M)\dot{x}^2 + (m+7M/3)a^2\dot{\theta}^2 + 2a(m-M)\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta}\Big] \\ + (m+M)gx + (M-m)ga\cos\theta - \frac{k}{2}(x - a\cos\theta)^2 - \frac{k}{2}(x + 3a\cos\theta)^2. \end{aligned}$$

Utilizzando questa espressione otteniamo le equazioni del moto:

$$(M+m)\ddot{x} - (M-m)a\sin\theta\,\ddot{\theta} - (M-m)a\cos\theta\dot{\theta}^2 = (m+M)g - 2k(x + a\cos\theta).$$

e

$$(m+7M/3)a^2\ddot{\theta} - (M-m)a\sin\theta\,\ddot{x} = -\Big[(M-m)g - 2k(x + 5a\cos\theta)\Big]a\sin\theta.$$

2) Dal punto precedente si ha

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}V = -(m+M)g + 2k(x + a\cos\theta) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial \theta}V = \Big[(M-m)g - 2k(x + 5a\cos\theta)\Big]a\sin\theta = 0 \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono:

$$x = \frac{(m+M)g}{2k} - a\cos\theta, \qquad \text{con } \theta = 0, \pi \text{ e } \cos\theta = -\frac{mg}{4ka}.$$

L'ultima soluzione, doppia, esiste se e solo se $\lambda = \frac{mg}{4ka} \le 1$. Per determinare la stabilità di questi punti stazionari consideriamo gli autovalori dell'Hessiano del potenziale:

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}$$

- Per $\theta = 0$ si ha

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & -2a(mg + 4ka) \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono

$\lambda_1 = 2k > 0$
$\lambda_2 = -2a(mg + 4ka) < 0$

ed il punto stazionario è di equilibrio instabile.

• Per $\theta = \pi$ (o $\theta = -\pi$) si ha

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2a(mg - 4ka) \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono

$\lambda_1 = 2k > 0$
$\lambda_2 = 2a(mg - 4ka)$

ed il punto stazionario è di equilibrio stabile se $\lambda = \frac{mg}{4ka} > 1$, ovvero instabile se $\lambda = \frac{mg}{4ka} < 1$.

• Per $\cos\theta = -\frac{mg}{4ka}$ con $\lambda = \frac{mg}{4ka} < 1$ si ha

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} 2k & -2k\sin\theta \\ -2k\sin\theta & 10k\sin^2\theta \end{bmatrix},$$

la cui traccia e determinate sono

$\text{Tr } V_{hk} = 2k + 10k\sin^2\theta > 0$
$\text{Det } V_{hk} = 16k^2\sin^2\theta > 0.$

Gli autovalori sono entrambi positivi ed il punto stazionario uno stato di equilibrio stabile. Vi sono due di questi punti e rappresentano configurazioni simmetriche rispetto all'asse x.

3) Con i valori dati $r = mg/4ka = 5/4 > 1$ per cui la configurazione di equilibrio stabile è data $\theta = \pi$ (ovvero $\theta = -\pi$). Per questo punto si ha

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dall'espressione dell'energia cinetica ottenuta al punto 1) segue

$$T_{hk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}\partial\dot{\theta}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}\partial\dot{x}} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m + M & a(m-M)\sin\theta \\ a(m-M)\sin\theta & (m + 7M/3)a^2 \end{bmatrix}$$

che per $\theta = \pi$ ed i valori numerici dati si riduce a

$$T_{hk} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 50/3 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza

$$V_{hk} - \omega^2 T_{hk} = \begin{bmatrix} 2(1 - 5\omega^2) & 0 \\ 0 & 2(1 - 25\omega^2/3) \end{bmatrix},$$

per cui le due frequenze sono

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$