

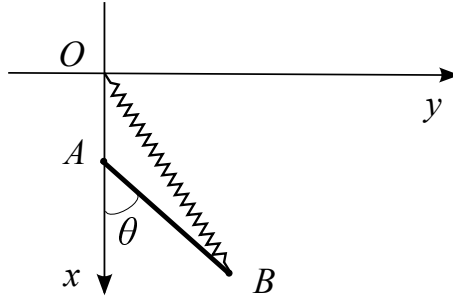
## Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 17 giugno 2022

Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, L. Gualtieri

**1. Meccanica Lagrangiana.** In un piano verticale è scelto un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$  di origine  $O$  e con l'asse  $x$  orientato verso il basso. In tale piano si muove un'asta rigida di lunghezza  $\ell$  e massa  $M$ . L'estremo  $A$  dell'asta è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse  $x$ , mentre all'estremo  $B$  è applicata una forza  $\vec{F} = -k\vec{OB}$ . Il sistema è soggetto alla forza gravitazionale.

Prendendo come coordinate Lagrangiane la coordinata  $x$  del punto  $A$  e l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con l'asse  $x$ , si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema;
2. Le posizioni di equilibrio del sistema, con relativa stabilità, in funzione del parametro  $\lambda = Mg/k\ell$ .
3. Fissato  $\lambda > 2$  e scelta una posizione di equilibrio, le frequenze delle piccole oscillazioni.



Es. 1

**2. Trasformazioni canoniche.** Si consideri la trasformazione

$$Q = \frac{1}{q}(p - q)^\alpha,$$
$$P = -\frac{2}{3}q^\beta(p - q)^{1/2},$$

dalle variabili canoniche  $q, p$  alle variabili  $Q, P$ , con  $\alpha, \beta$  parametri reali.

1. Determinare la coppia di valori di  $\alpha, \beta$  per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare una funzione generatrice  $F_2(q, P)$  della trasformazione canonica.

**3. Cinematica relativistica.** Dopo aver sincronizzato gli orologi di bordo, due astronavi partono dalla Terra nello stesso istante (tempo 0), muovendosi la prima lungo l'asse  $x$  con velocità  $c/2$  e la seconda lungo l'asse  $y$  con velocità  $c/3$  di un sistema di riferimento solidale con la terra. Trascorso un tempo  $t_0$  misurato nel sistema di riferimento di ciascuna astronave, le astronavi invertono il moto e tornano sulla terra.

1. Quale astronave torna prima sulla terra?
2. Quanto tempo passa, misurato nel sistema di riferimento solidale con la terra, tra l'arrivo della prima e della seconda astronave?
3. Che tempo segna l'orologio di bordo di ciascuna astronave al rientro sulla terra?

**4. Trasformazioni di Lorentz.** In un sistema di riferimento inerziale di coordinate spazio-temporale  $(ct, x, y, z)$  sono dati due eventi

$$E_1 = (\sinh a, 0, 0, 5), \quad E_2 = (0, \cosh a, b, 5)$$

dove  $a$  è un parametro fissato. Determinare per quali valori del parametro  $b$  esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono simultanei. Per tali valori di  $b$ , si determini la trasformazione di coordinate tra il sistema di riferimento originale ed uno in moto rispetto ad esso lungo l'asse  $x$  tale che gli eventi siano contemporanei e calcolare la separazione  $E_2E_1$  in tale riferimento.

# Soluzioni

## 1. Meccanica lagrangiana.

La Lagrangiana del sistema è

$$\begin{aligned} L &= \frac{M}{2} \left( \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3} \dot{\theta}^2 - \ell \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} \right) + Mg \left( x + \frac{\ell}{2} \cos \theta \right) - \frac{k}{2} (x^2 + 2\ell x \cos \theta + \ell^2) \\ &= \frac{M}{2} \left( \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3} \dot{\theta}^2 - \ell \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} \right) - \frac{k}{2} x^2 + Mg x - k\ell \left( x - \frac{\lambda}{2} \ell \right) \cos \theta - \frac{k\ell^2}{2}, \end{aligned}$$

con  $\lambda = Mg/k\ell$ . Le posizioni di equilibrio sono:

1.  $\theta = 0$ ,  $x = (\lambda - 1)\ell$ , stabile se  $\lambda < 2$ .
2.  $\theta = \pm\pi$ ,  $x = (\lambda + 1)\ell$ , stabile.
3.  $\cos \theta = \lambda/2$ ,  $x = \lambda\ell/2$ , esiste solo per  $\lambda < 2$ . Questi sono due punti simmetrici rispetto all'asse  $x$  e sono instabili quando esistono.

La posizione di equilibrio stabile per  $\lambda > 2$  è:  $\theta = \pi$  e  $x = (\lambda + 1)\ell$ .  $\theta = -\pi$  è coincidente con questa. Le piccole oscillazioni attorno ad essa sono caratterizzate dalle pulsazioni proprie

$$\omega_1^2 = \frac{k}{M}, \quad \omega_2^2 = \frac{3}{1 + \lambda/2} \frac{k}{M}.$$

## 2. Trasformazioni canoniche.

1. La trasformazione è canonica per  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 2$ .
2. Una funzione generatrice è  $F_2(q, P) = \frac{1}{2}q^2 - \frac{3}{4}q^{-3}P^2 + \text{const.}$ .

## 3. Cinematica relativistica.

1. Arriva prima l'astronave partita lungo l'asse  $y$ .
2. L'astronave partita lungo l'asse  $x$  ritorna sulla terra con un ritardo di  $t_x - t_y = \frac{4t_0}{\sqrt{3}} - \frac{3t_0}{\sqrt{2}} \simeq 0.19t_0$ .
3. All'arrivo sulla terra entrambi gli orologi di bordo segnano un tempo pari a  $2t_0$ .

## 4. Trasformazioni di Lorentz.

La separazione tra i due eventi, nel riferimento  $R : (t, x, y, z)$  (con  $c = 1$ ), è

$$E_2 E_1 = (-\sinh a, \cosh a, b, 0),$$

quindi  $|E_2 E_1|^2 = -(1 + b^2) < 0$ : l'intervallo è di tipo spazio per ogni valore di  $b$  ed esistono riferimenti  $R'$  in moto rispetto al riferimento  $R$  in cui i due eventi avvengono allo stesso istante.

In particolare questo avviene nel sistema di riferimento  $R'$  in moto lungo l'asse  $x$  di  $R$  con velocità

$$\beta = -\tanh a$$

in cui la separazione vale

$$E_2 E_1 = (0, 1, b, 0).$$