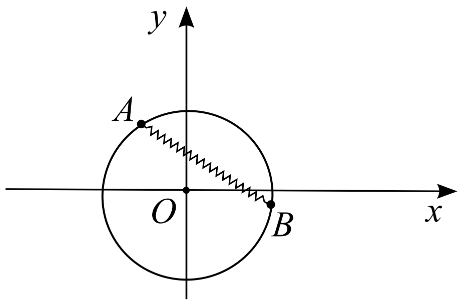
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 11 novembre 2022
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, L. Gualtieri

1. Meccanica Lagrangiana. Due masse m identiche e puntiformi sono libere di muoversi senza attrito su una guida circolare di raggio R posta in un piano verticale. Sulle due masse, oltre alla forza peso, agisce una forza conservativa con potenziale $V_k(|\vec{x}_B - \vec{x}_A|) = \frac{k}{4}|AB|^4$.

Utilizzando il formalismo Lagrangiano con coordinate Lagrangiane gli angoli θ_A e θ_B che i raggi OA e OB formano con l'asse x misurati in senso positivo antioratio, si chiede:

1. Le equazioni del moto del sistema;
2. Verificare se le seguenti configurazioni sono di equilibrio e, in caso affermativo, valutarne la stabilità:
   (a) $\theta_A = 0$, $\theta_B = \pi$
   (b) $\theta_A = 0$, $\theta_B = \frac{\pi}{2}$
   (c) $\theta_A = -\frac{\pi}{2}$, $\theta_B = \frac{\pi}{2}$
   (d) $\theta_A = -\frac{\pi}{2}$, $\theta_B = -\frac{\pi}{2}$
   (e) $\theta_A = \frac{\pi}{2}$, $\theta_B = \frac{\pi}{2}$
3. Scelta una posizione di equilibrio stabile, le frequenze delle piccole oscillazioni.



Es. 1

2. Trasformazioni canoniche. Si consideri la trasformazione

$$Q = \alpha - e^{-pq} + \log(p^\beta q^\gamma),$$
$$P = -p\sqrt{q^\gamma},$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, con α, β, γ parametri reali.

1. Determinare *tutti* i valori di α, β, γ per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare una funzione generatrice $F_4(p, P)$ della trasformazione canonica.

3. Cinematica relativistica. Due astronavi partono dalla Terra con velocità $v_1 = \beta_1 c$ e $v_2 = \beta_2 c$ dirette lungo l'asse x in verso opposto. Passato lo stesso tempo $\tau_1 = \tau$ sulla prima astronave e $\tau_2 = \tau$ sulla seconda astronave, esse invertono la rotta (eventi E_1 ed E_2). Dopo l'inversione di rotta, le velocità sono scambiate: $v_1 = \beta_2 c$ e $v_2 = \beta_1 c$. Si assuma $\beta_1 = 1/2$ e $\beta_2 = 1/3$.

1. Determinare le coordinate t_0 e x_0 rispetto alla Terra dell'evento in cui le due astronavi si incontrano di nuovo.
2. Determinare se esiste un sistema di riferimento in cui le inversioni di rotta (eventi E_1 ed E_2) sono simultanei, e in caso affermativo esibire la trasformazione di Lorentz.
3. In tale sistema di riferimento (se esiste) determinare la coordinata x'_0 del punto in cui le astronavi si incontrano.

Suggerimenti: Disegnare il diagramma spazio-temporale, e non sostituire i valori numerici se non strettamente necessario.

Soluzioni

1. Meccanica lagrangiana.
Indicato con θ_A e θ_B gli angoli che identificano la posizione della massa A e B, rispettivamente, la Lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{mR^2}{2}\Big(\dot\theta_A^2 + \dot\theta_B^2\Big) - mgR\Big(\sin\theta_A + \sin\theta_B\Big) - kR^4\Big[1 - \cos(\theta_A - \theta_B)\Big]^2,$$

da cui si ottengono le equazioni del moto:

$$mR^2\ddot\theta_A = -mgR\cos\theta_A - 2KR^4\Big[1 - \cos(\theta_A - \theta_B)\Big]\sin(\theta_A - \theta_B),$$

e

$$mR^2\ddot\theta_B = -mgR\cos\theta_B + 2KR^4\Big[1 - \cos(\theta_A - \theta_B)\Big]\sin(\theta_A - \theta_B),$$

Le posizioni date sono:

(a) $\theta_A = 0$, $\theta_B = \pi$, non è di equilibrio

(b) $\theta_A = 0$, $\theta_B = \pi/2$, non è di equilibrio (non rispetta nemmeno la simmetria del sistema)

(c) $\theta_A = -\pi/2$, $\theta_B = \pi/2$, equilibrio, Instabile.

(d) $\theta_A = -\pi/2$, $\theta_B = -\pi/2$, equilibrio, Stabile.

(e) $\theta_A = \pi/2$, $\theta_B = \pi/2$, equilibrio, Instabile.

Le frequenze delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile (d) sono degeneri ed entrambe uguali a

$$\omega^2 = \frac{g}{R}.$$

La forza attrattiva tra le masse non interviene perchè ponendo $\theta_A = -\pi/2 + \eta_A$ e $\theta_B = -\pi/2 + \eta_B$ si ha

$$V_k(\eta_A, \eta_B) = \frac{k}{4}\big(\eta_A - \eta_B\big)^4, \qquad\qquad \eta_{A,B} \ll 1.$$

V_k è quartico, e non quadratico, e quindi non contribuisce al moto intorno alla posizione di equilibrio.

2. Trasformazioni canoniche.

1. La trasformazione è canonica per $\beta = 3$, $\gamma = 2$ e per ogni valore di α.
2. Una funzione generatrice è $F_4(p, P) = (\alpha - 2)P - e^P + P\log(pP^2)$.

3. Cinematica relativistica.

1. Nel sistema di riferimento della Terra, le coordinate in cui le astronavi si incontrano sono $t_0 = (\gamma_1 + \gamma_2)\tau = 2.2\tau$ e $x_0 = (\beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2)c\tau = 0.22c\tau$.
2. L'intervallo $|E_1 - E_2|^2 = 2c^2\tau^2[1 - \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2)] = c^2\tau^2(2 - 7/\sqrt{6}) = -0.858c^2\tau^2 < 0$ è di tipo spazio, quindi esiste un sistema di riferimento in cui gli eventi sono simultanei. Esso si ottiene con un boost lungo x di velocità $\beta = \frac{\gamma - \gamma_2}{\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2} = 5 - 2\sqrt{6} = 0.101$.
3. In tale sistema di riferimento la coordinata $x_0' = 0$, come è ovvio perché in questo sistema di riferimento le due astronavi si muovono simmetricamente.