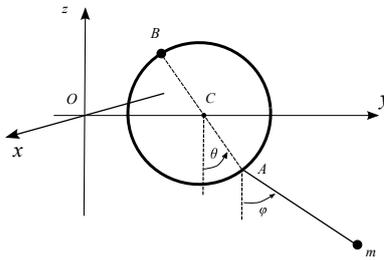


**Compito straordinario di Meccanica Analitica e Relativistica del 6 novembre 2023**  
**Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto**

**Esercizio 1 [6 punti].**



Un anello omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  può ruotare attorno al suo asse centrale ortogonale al piano verticale  $yz$  e parallelo all'asse  $x$  del sistema di riferimento  $Oxyz$ . Il centro  $C$  dell'anello può muoversi senza attrito lungo l'asse  $y$ . Un pendolo di massa  $m < M$  e lunghezza  $R$  è sospeso a un punto  $A$  dell'anello; un punto materiale di massa  $M$  è fissato al punto  $B$  dell'anello diametralmente opposto ad  $A$ , vedi figura. Sul sistema agisce la forza di gravità.

Utilizzando come coordinate lagrangiane la posizione  $y$  del centro del disco e gli angoli  $\theta$  e  $\varphi$  mostrati in figura:

1. Determinare la Lagrangiana.
2. Discutere le simmetrie continue della Lagrangiana e determinare due integrali primi del moto.

**Esercizio 2 [8 punti].** Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2(I + mr^2)} + mg(a + r) \sin \theta + \frac{k}{2} r^2,$$

con  $m, I, a$  e  $k$  opportune costanti positive.

Si chiede:

1. Le equazioni di Hamilton.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità.
3. Scelto un punto di equilibrio stabile le frequenze delle piccole oscillazioni.

**Esercizio 3 [8 punti].** Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{2}{9} q^4 (p - q), \quad p > q.$$

Si chiede di:

1. scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione  $S(q, P, t) = W(q, P) - \frac{1}{2} P^2 t$  che mappi la Hamiltoniana  $H(q, p)$  in  $K(Q, P) = 0$ ;
2. determinare la trasformazione canonica da  $(q, p)$  a  $(Q, P)$  generata da  $S(q, P, t)$  e la sua inversa da  $(Q, P)$  a  $(p, q)$ ;
3. utilizzare la trasformazione canonica trovata per risolvere le equazioni del moto per  $(q, p)$  con condizioni iniziali  $q(0) = -(3/2)^{1/3}$  e  $p(0) = 0$ .

**Esercizio 4 [8 punti].** Due astronavi A e B si trovano sulla terra (sistema di riferimento R). L'astronave A azzerava il suo orologio e parte con velocità  $v_A$  (evento che avviene a  $t = 0$  in R). Dopo un tempo  $T$  misurato in R, l'astronave B azzerava il suo orologio di bordo e contestualmente parte nella stessa direzione e verso di A con velocità  $v_B > v_A$ . L'astronave B sorpassa l'astronave A al tempo  $T_1$  misurato in R ed entrambe le astronavi continuano il loro viaggio fino a che gli orologi di bordo non segnano un tempo  $\tau_A = \tau_B = \tau_2$ . A questo punto invertono il moto e tornano verso la terra con velocità uguale in modulo a quella che avevano durante il viaggio di andata. Chiamando  $\gamma_A$  e  $\gamma_B$  i fattori di Lorentz corrispondenti a  $v_A$  e  $v_B$  si dica:

1. quali sono il tempo  $T_1$  e la distanza  $L_1$  dalla terra per i quali le due astronavi si incontrano la prima volta (in funzione di  $T$ ,  $v_A$ ,  $v_B$ );
2. quali sono le distanze  $L_{2A}$  e  $L_{2B}$  dalla terra ed i tempi  $T_{2A}$  e  $T_{2B}$  (misurati in R) per i quali le due astronavi invertono il loro moto (in funzione di  $T$ ,  $\tau_2$ ,  $v_A$ ,  $v_B$ ,  $\gamma_A$ ,  $\gamma_B$ );
3. Se  $v_A = 3/5c$ ,  $v_B = 4/5c$ ,  $T = 1y$  e  $\tau_2 = 12y$  esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi che corrispondono all'inversione del moto (vedi punto 2) sono simultanei? Ed uno in cui essi avvengono nello stesso punto dello spazio? Quale sarebbe la loro velocità minima?
4. Si consideri uno dei sistemi di riferimento trovati al punto precedente che si muova lungo un piano qualsiasi passante per l'asse individuato dal moto delle due astronavi e lo si chiami R'. Può esso avere una componente non nulla della velocità (rispetto ad R) in direzione ortogonale a tale asse e, in caso, qual è il valore massimo di tale componente?

## Soluzioni

### Esercizio 1.

1. La Lagrangiana è  $L = T - U$  con

$$T = M \left( \dot{y}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 - R \dot{\theta} \dot{y} \cos \theta \right) + \frac{1}{2} m \left[ \dot{y}^2 + R^2 \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) \right) + 2 \dot{y} R (\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\varphi} \cos \varphi) \right]$$

$$U = (M - m) g R \cos \theta - m g R \cos \varphi$$

per cui

$$L = \frac{1}{2} (m + 2M) (\dot{y}^2 + R^2 \dot{\theta}^2) + \frac{m R^2}{2} \dot{\varphi}^2 + (m - M) R \dot{\theta} \dot{y} \cos \theta + m R \dot{\varphi} \dot{y} \cos \varphi + m R^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) + (m - M) g R \cos \theta + m g R \cos \varphi.$$

da cui seguono le equazioni del moto.

2.  $L$  è invariante per traslazioni temporali e lungo  $y$ , quindi si conservano l'energia generalizzata  $\mathcal{H} = T + U$  e il momento cinetico

$$p_y = (m + 2M) \dot{y} + (m - M) R \dot{\theta} \cos \theta + m R \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

### Esercizio 2.

1.

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I + m r^2}$$

$$\dot{p}_r = \frac{m r}{(I + m r^2)^2} p_\theta^2 - m g \sin \theta - k r$$

$$\dot{p}_\theta = -m g (a + r) \cos \theta.$$

2. I punti di equilibrio sono

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $r = -\frac{m g}{k}$ , esiste sempre, stabile per  $\frac{k a}{m g} < 1$
- $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ,  $r = \frac{m g}{k}$ , esiste sempre, stabile per  $\frac{k a}{m g} > -1$
- $\theta = \sin^{-1} \frac{k a}{m g}$ ,  $r = -a$ , esiste per  $\left| \frac{k a}{m g} \right| < 1$ , sempre instabile

3. Per la prima posizione si ha

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{m^2 g^2 k}{I k^2 + m^3 g^2} \left( 1 - \frac{k a}{m g} \right)$$

mentre per la seconda

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{m^2 g^2 k}{I k^2 + m^3 g^2} \left( 1 + \frac{k a}{m g} \right)$$

### Esercizio 3.

1.  $S(q, P, t) = \frac{q^2}{2} - \frac{3}{4} \frac{P^2}{q^3} - \frac{1}{2} P^2 t$

2.

$$Q = \pm \left( q^{-1} + \frac{2}{3} q^2 t \right) (q - p)^{1/2}$$
$$P = \pm \frac{2}{3} q^2 (q - p)^{1/2}$$

e

$$q = - \left( \frac{3}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{(Q/P + t)^3}$$
$$p = \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} (Q/P + t)^{4/3} - \left( \frac{3}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{(Q/P + t)^3}$$

3.

$$q(t) = -(3/2)^{1/3} (1+t)^{-1/3}$$
$$p(t) = (3/2)^{1/3} \left[ (1+t)^{4/3} - (1+t)^{-1/3} \right].$$

#### Esercizio 4.

1.

$$T_1 = \frac{v_B T}{v_B - v_A}, \quad L_1 = v_A T_1$$

2.

$$T_{2A} = \gamma_A \tau_2 \quad T_{2B} = \gamma_B \tau_2 + T \quad L_{2A} = v_A \gamma_A \tau_2 \quad L_{2B} = v_B \gamma_B \tau_2$$

3.

$$E_A = (cT_{2A}, L_{2A}, 0, 0) = (15, 9, 0, 0)ly \quad E_B = (cT_{2B}, L_{2B}, 0, 0) = (21, 16, 0, 0)ly$$
$$\Delta E = (c\Delta T, \Delta L, 0, 0) = (6, 7, 0, 0)ly \quad (\Delta E)^2 = -13 < 0$$
$$0 = c\Delta T' = \gamma(c\Delta T - \beta_x \Delta L) \quad \Rightarrow \quad \beta_x = \frac{c\Delta T}{\Delta L} = \frac{6}{7}$$

4.

$$\beta_y < \sqrt{1 - \beta_x^2} = \frac{\sqrt{13}}{7}$$