

# La Lista (v1.0)

Questa lista verrà aggiornata continuamente con l'inserimento di

- (1) argomenti trattati durante il corso
- (2) prerequisiti necessari la cui conoscenza è ritenuta indispensabile

**Attenzione:** l'inserimento di nuovi elementi non avviene necessariamente alla fine della lista. Controllate sempre tutte le sezioni.

## 1 Varie

(V1) (Coefficiente binomiale). Se  $n, k \in \mathbb{N}$ , definisco

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

(V2) (Coefficiente binomiale generalizzato). Se  $b \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$  e  $k \in \mathbb{N}$ , definisco

$$\binom{b}{k} := \frac{b(b-1)(b-2) \cdots (b-k+1)}{k!}.$$

Esempio:

$$\binom{1/2}{4} = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{4!} = -\frac{5}{128}$$

(V3) (Potenza di un binomio).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad a, b \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(V4) (Somma geometrica finita).

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

## 2 Analisi reale

(AR1) (Def: estremo superiore). Sia  $A$  un insieme di numeri reali. Il numero reale  $s$  è detto *estremo superiore* di  $A$  (e si scrive  $s = \sup A$ ) se

- (a) per ogni  $x \in A$  si ha  $x \leq s$
- (b) per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $x \in A$  tale che  $x > s - \varepsilon$ .

(AR2) (Sviluppo di Taylor con resto di Lagrange). Sia  $f \in C^{n+1}(a, b)$  e  $x_0 \in (a, b)$ . Allora, per ogni  $x \in (a, b)$  esiste  $\xi(x)$  compreso fra  $x_0$  e  $x$  tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(AR3) (Alcuni sviluppi in serie di potenze).

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}) & \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1) \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}) & \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}) & \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (|x| < 1) & \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

(AR4) (Condizione necessaria per la convergenza di una serie: la successione associata è infinitesima). Se la serie di numeri reali (o complessi)  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  è convergente, allora si ha  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

(AR5) (Controesempio: La condizione  $a_k \rightarrow 0$  non è sufficiente per la convergenza della serie associata). Sia  $a_k = 1/k$ . Allora  $a_k \rightarrow 0$ , ma  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ .

(AR6) (Convergenza di una serie o di un integrale speciale). La serie e l'integrale

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha (\log k)^\beta} \qquad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\log x)^\beta}$$

sono convergenti se e solo se  $\alpha > 1$  oppure se  $\alpha = 1$  e  $\beta > 1$ .

(AR7) (Integrali notevoli). Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} x^{2n} dx = (2n-1)!!$$

### 3 I numeri complessi

(NC1) (Def: campo). Definizione di campo.

(NC2) (Def: definizione del modulo, usando il coniugato).  $|z| := \sqrt{z \bar{z}}$ .

(NC3) (Def: definizione del modulo, usando la parte reale e la parte immaginaria). Se  $z = x + iy$  con  $x, y$  reali,  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ .

(NC4) (Proprietà del modulo e della coniugazione).

(a)  $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$ .

(b)  $\overline{wz} = \overline{w} \overline{z}$ .

(c)  $\overline{\overline{z}} = z$ .

(d)  $|wz| = |w| |z|$ .

(e)  $|\overline{z}| = |z|$ .

(f)  $|w + z| \leq |w| + |z|$  (disuguaglianza triangolare).

(g)  $|w \pm z| \geq ||w| - |z||$  (disuguaglianza triangolare inversa).

(h)  $|w + z|^2 + |w - z|^2 = 2(|w|^2 + |z|^2)$  (regola del parallelogramma).

(NC5) (Forma polare, argomento).  $z \in \mathbb{C}$  è espresso in *forma polare* se  $z = \rho e^{i\vartheta}$ , in cui  $\rho$  è un numero reale *positivo* e  $\vartheta$  è un numero reale. L'*argomento* di  $z$  si denota con  $\arg z$  ed è definito come

$$\arg z := \vartheta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(NC6) (Argomento principale). Se  $z = \rho e^{i\vartheta}$  è espresso in forma polare l'*argomento principale* di  $z$  si denota con  $\text{Arg } z$  ed è dato dall'unico valore di  $\vartheta' = \vartheta + 2k\pi$  tale che  $-\pi < \vartheta' \leq \pi$ .

(NC7) (Argomento con il taglio sul semiasse reale positivo, "argomento più"). Se  $z = \rho e^{i\vartheta}$  è espresso in forma polare l'*argomento più* di  $z$  si denota con  $\arg_+ z$  ed è dato dall'unico valore di  $\vartheta' = \vartheta + 2k\pi$  tale che  $0 \leq \vartheta' < 2\pi$ .

(NC8) (Esempio: forma polare, argomento).  $z = 3e^{i(15\pi/4)}$  è espresso in forma polare. Quindi

$$\begin{aligned} \arg z &= \frac{15\pi}{4} + 2k\pi = \left\{ \dots, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{23\pi}{4}, \frac{31\pi}{4}, \dots \right\} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{Arg } z &= -\frac{\pi}{4} \\ \arg_+ z &= \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

(NC9) (Non Esempio: forma polare, argomento). *Attenzione:*  $z = -3e^{i(5\pi/4)}$  *non* è espresso in forma polare a causa del segno meno. Quindi per trovare l'argomento di  $z$  bisogna prima scriverlo correttamente in forma polare. Usando l'identità  $-1 = e^{i\pi}$  si trova

$$z = -3e^{i(5\pi/4)} = 3e^{i\pi} e^{i(5\pi/4)} = 3e^{i(9\pi/4)}.$$

A questo punto si procede come al punto (NC8).

(NC10) (Trasformazione polare  $\rightarrow$  rettangolare). Se  $z = \rho e^{i\vartheta}$ ,

$$\text{Re } z = \rho \cos \vartheta \quad \text{Im } z = \rho \sin \vartheta$$

(NC11) (Trasformazione rettangolare  $\rightarrow$  polare). Se  $z = x + iy$ ,

$$\begin{aligned} \rho &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta &= \arctan(y/x) \underbrace{+ \pi}_{\text{se } x < 0} + 2k\pi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

(NC12) (Esempio: trasformazione rettangolare  $\rightarrow$  polare). Se  $z = -1 - i$ , si ha

$$\arctan(y/x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Poichè  $z$  si trova nel terzo quadrante devo aggiungere  $\pi$  e ottengo

$$\vartheta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

L'argomento generico di  $z$  è dato da

$$\arg z = \vartheta + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi.$$

Per trovare l'argomento principale e l'argomento più bisogna, a questo punto, scegliere il  $k$  "giusto". Si trova

$$\text{Arg } z = \vartheta - 2\pi = -\frac{3\pi}{4} \qquad \arg_+ z = \vartheta = \frac{5\pi}{4}.$$

(NC13) (Potenza di un numero espresso in forma polare). Se  $z = \rho e^{i\vartheta}$ , allora  $z^n = \rho^n e^{in\vartheta}$ .

(NC14) (Formula di De Moivre).  $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)$ .

(NC15) (Soluzione dell'equazione  $z^n = w$ . Aspetto algebrico). Per trovare tutte le soluzioni di  $z^n = w$ : scrivere  $w$  in forma polare  $w = r e^{i\alpha}$ . Quindi si ha:

$$z = \sqrt[n]{r} \exp \left[ i \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(NC16) (Soluzione dell'equazione  $z^n = w$ . Aspetto geometrico). Le soluzioni di  $z^n = w$  sono i vertici di un poligono regolare con  $n$  lati e si trovano sulla circonferenza centrata in 0 di raggio  $\sqrt[n]{|w|}$  (fig. 1).

## 4 Luoghi geometrici nel piano complesso

(LG1)  $\{|z - a| = r\}$ . Circonferenza di centro  $a$  e raggio  $r$ .

(LG2)  $\{|z - a| \leq r\}$ . Disco chiuso di centro  $a$  e raggio  $r$ .

(LG3)  $\{r_1 \leq |z - a| \leq r_2\}$ . Corona circolare di centro  $a$  e raggi  $r_1, r_2$ .

(LG4)  $\{|z - a| = |z - b|\}$ . Asse del segmento  $[a, b]$ .

(LG5)  $\{|z - a| \leq |z - b|\}$ . Semipiano delimitato dall'asse del segmento  $[a, b]$  contenente  $a$ .

(LG6)  $\{a \leq |z| \leq b, c \leq \arg z \leq d\}$ . Settore di corona circolare centrato nell'origine, di raggi  $a$  e  $b$  e angoli  $c$  e  $d$ .

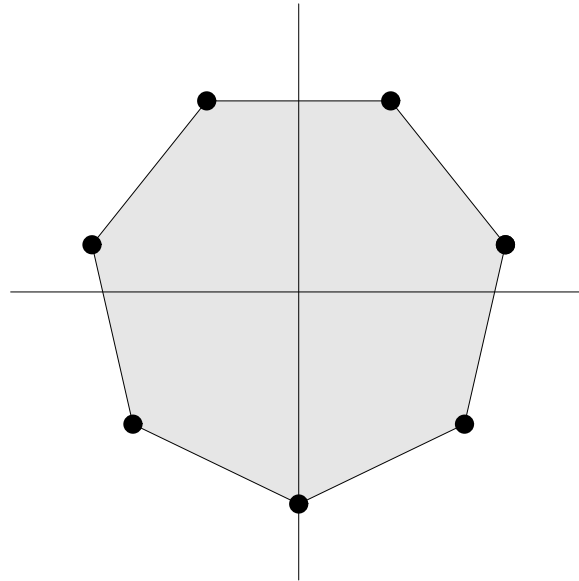


Figura 1: Le 7 soluzioni dell'equazione  $z^7 = 2i$ .

## 5 Serie di potenze

(SP1) (Formula di Stirling). Per ogni intero positivo  $n$  si ha

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon_n) \quad \text{in cui } \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

(SP2) (Def: limite superiore di una successione reale). Il *limite superiore* della successione reale  $(a_n)$  è definito come

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k.$$

(SP3) (Alcune proprietà del limite superiore).

- (a)  $\overline{\lim}_n (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_n a_n + \overline{\lim}_n b_n$
- (b) Se  $a_n \geq 0$  e  $b_n \geq 0$ , allora  $\overline{\lim}_n (a_n b_n) \leq (\overline{\lim}_n a_n) (\overline{\lim}_n b_n)$
- (c) Se  $\lim_n a_n = a$  e  $a > 0$ , allora  $\overline{\lim}_n (a_n b_n) = a \cdot (\overline{\lim}_n b_n)$ .

(SP4) (Raggio di convergenza di una serie di potenze). Il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  è dato da

$$R = \left( \overline{\lim}_n |c_n|^{1/n} \right)^{-1} \in [0, \infty].$$

Valgono le seguenti identità, a patto che esistano i limiti al secondo membro:

$$R = \left( \lim_n |c_n|^{1/n} \right)^{-1} \quad (\text{criterio della radice})$$

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (\text{criterio del rapporto})$$

(SP5) Sia  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  crescente. Allora il raggio di convergenza  $R$  della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{g(n)}$$

è dato da

$$R := \left( \limsup |a_n|^{1/g(n)} \right)^{-1}$$

(SP6) (Trucco: butta via le potenze di  $n$ ). Se  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le due serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha c_n (z - z_0)^n$$

hanno lo stesso r.d.c., quindi, *ai soli fini del calcolo del r.d.c.*, il fattore  $n^\alpha$  può essere eliminato.

(SP7) (Alcuni sviluppi in serie di potenze).

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C}) & \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1) \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}) & \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C}) \\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}) & \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C}) \\ \log(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1) & \arctan z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad (|z| < 1) \end{aligned}$$

(SP8) (Condizione necessaria per la convergenza di una serie: la successione associata è infinitesima). Se la serie di numeri reali (o complessi)  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  è convergente, allora si ha  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

(SP9) (Controesempio: La condizione  $a_k \rightarrow 0$  non è sufficiente per la convergenza della serie associata). Sia  $a_k = 1/k$ . Allora  $a_k \rightarrow 0$ , ma  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ .

## 6 Funzioni analitiche

(FA1) (Def: funzioni differenziabili e analitiche). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $a \in G$  e  $f : G \mapsto \mathbb{C}$ .  $f$  è detta *differenziabile* in  $a$  se esiste il limite

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad h \in \mathbb{C}.$$

$f$  è detta *analitica* se è differenziabile con derivata continua.

(FA2) (Teo: differenziazione di una serie di potenze). Sia

$$(6.1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad z \in B_R(z_0),$$

in cui  $R$  è il r.d.c. della serie. Allora

(a)  $f$  è infinitamente differenziabile in  $B_R(z_0)$

(b) le derivate si possono fare “termine a termine”, vale a dire

$$(6.2) \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z - z_0)^{n-k} \quad z \in B_R(z_0)$$

(c) la serie di potenze (6.2) ha lo stesso r.d.c.  $R$  della serie di potenze (6.1).

(d)  $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ .

(FA3) (Cor: serie di potenze  $\Rightarrow$  analitica). Una serie di potenze centrata in  $z_0$  con r.d.c.  $R$  è una funzione analitica in  $B_R(z_0)$ .

(FA4) (Teo: se  $f' = 0$ ,  $f$  è costante). Sia  $G$  aperto e connesso in  $\mathbb{C}$  e sia  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  una funzione differenziabile tale che  $f'(z) = 0$  per ogni  $z \in G$ . Allora  $f$  è costante su  $G$ .

## 7 Funzioni elementari e loro proprietà

(FE1) (Alcune proprietà dell'esponenziale).

(a)  $D e^z = e^z$ .

(b)  $e^w e^z = e^{w+z}$ .

(c)  $e^z$  non è mai uguale a zero (segue da  $e^z e^{-z} = 1$ ).

(d)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ .

(e)  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ .

(f)  $\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)$ . Esempio:  $\operatorname{Re}(e^{3+2i}) = e^3 \cos(2)$ .

(g)  $\operatorname{Im} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)$ .

(h)  $\exp$  è  $2\pi i$  periodica, vale a dire se  $k$  è un intero, si ha  $e^{z+i(2k\pi)} = e^z$ .

(FE2) (Alcune proprietà delle funzioni trigonometriche).

(a)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ .

(b)  $D(\sin z) = \cos z$

(c)  $D(\cos z) = -\sin z$

(d)  $\sin(w \pm z) = \sin w \cos z \pm \cos w \sin z$ .

(e)  $\cos(w \pm z) = \cos w \cos z \mp \sin w \sin z$ .

(f)  $\cos^2 z = (1 + \cos(2z))/2$ .

(g)  $\sin^2 z = (1 - \cos(2z))/2$ .

(FE3) (Legame fra funzioni trigonometriche e iperboliche).

(a)  $\sin(iz) = i \sinh(z)$ .

(b)  $\cos(iz) = \cosh(z)$ .

(FE4) (Trucco: come ricavare velocemente le proprietà delle funzioni iperboliche, a partire dalle analoghe proprietà delle funzioni trigonometriche).

(a) Esempio: sapendo che  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ , sostituisco  $z \rightarrow iz$  e ottengo  $\cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$ . Quindi, ricordando la relazione fra  $\sin$  e  $\sinh$  e quella fra  $\cos$  e  $\cosh$ , trovo

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

(b) Esempio: analogamente, a partire da  $\sin(w+z) = \sin w \cos z + \cos w \sin z$ , si ricava

$$\sinh(w+z) = \sinh w \cosh z + \cosh w \sinh z.$$

(FE5) (Parte reale ed immaginaria delle funzioni trigonometriche ed iperboliche).

(a)  $\operatorname{Re}(\sin z) = \sin(\operatorname{Re} z) \cosh(\operatorname{Im} z)$

(b)  $\operatorname{Im}(\sin z) = \cos(\operatorname{Re} z) \sinh(\operatorname{Im} z)$

(c)  $\operatorname{Re}(\cos z) = \cos(\operatorname{Re} z) \cosh(\operatorname{Im} z)$

(d)  $\operatorname{Im}(\cos z) = -\sin(\operatorname{Re} z) \sinh(\operatorname{Im} z)$ .

Queste relazioni e le analoghe per le funzioni iperboliche non è necessario ricordarle a memoria. Infatti si possono ottenere velocemente a partire dalle formule di addizione degli archi e dalle relazioni che legano funzioni trigonometriche e iperboliche. Esempio: sia  $z = x + iy$ . Allora

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

da cui si ottiene

$$\operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \cosh y$$

$$\operatorname{Im}(\sin z) = \cos x \sinh y,$$

(FE6) (Equazione  $\exp z = w$ ). Se  $w \neq 0$ , le soluzioni dell'equazione  $\exp z = w$  sono date da

$$z = \log |w| + i(\arg w + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si noti che ci sono *infinite soluzioni* e che queste giacciono sulla retta verticale  $x = \log |w|$  a distanza  $2\pi$  l'una dalla successiva.

Se  $w = 0$ , l'equazione  $\exp z = w$  non ha soluzioni (perchè l'esponenziale complesso non si annulla mai).

(FE7) (Equazione  $\sin z = w$ . Informazioni qualitative sulle soluzioni). L'equazione  $\sin z = w$  ha sempre infinite soluzioni. Ci sono due casi:

- (a) se c'è una soluzione reale, allora le soluzioni sono tutte reali, vale a dire sono quelle già note dalla trigonometria reale, del tipo

$$\{\vartheta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \vartheta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ad esempio

$$\sin z = 1/2 \quad \Rightarrow \quad z = \pi/6 + 2k\pi \text{ oppure } z = 5/6\pi + 2k\pi.$$

- (b) se c'è una soluzione non reale, allora tutte le soluzioni sono non reali e sono disposte su due rette orizzontali equidistanti dall'asse  $x$ . Più precisamente l'insieme delle soluzioni è del tipo

$$\{\vartheta + 2k\pi - i\beta\} \cup \{\pi - \vartheta + 2k\pi + i\beta\}$$

(FE8) (Equazione  $\cos z = w$ . Informazioni qualitative sulle soluzioni). L'equazione  $\cos z = w$  ha sempre infinite soluzioni. Ci sono due casi:

- (a) se c'è una soluzione reale, allora le soluzioni sono tutte reali, vale a dire sono quelle già note dalla trigonometria reale, del tipo

$$\{\pm\vartheta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Ad esempio

$$\cos z = 1/2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\pi/3 + 2k\pi.$$

- (b) se c'è una soluzione non reale, allora tutte le soluzioni sono non reali e sono disposte su due rette orizzontali equidistanti dall'asse  $x$ . Più precisamente l'insieme delle soluzioni è del tipo

$$\{\vartheta + 2k\pi - i\beta\} \cup \{-\vartheta + 2k\pi + i\beta\}$$

(FE9) (Def: ramo del logaritmo). Un *ramo del logaritmo* è una funzione continua  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  in cui  $G$  è una regione (insieme aperto e connesso) in  $\mathbb{C}$  e  $\exp f(z) = z$  (vale a dire  $f$  è l'inversa dell'esponenziale).

(FE10) (Def: ramo principale del logaritmo). Il *ramo principale* del logaritmo è definito sull'insieme  $G := \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$  come

$$\log z := \log |z| + i \operatorname{Arg} z$$

(ricorda che  $\operatorname{Arg}$  è l'argomento principale).

(FE11) (Notazione.  $\log$  = “ramo principale”). A meno che non venga detto esplicitamente il contrario, denotiamo con  $\log z$  il ramo principale del logaritmo.

(FE12) (Def: ramo “più” del logaritmo). Il ramo “più” del logaritmo è definito sull'insieme  $G := \mathbb{C} \setminus \{z \geq 0\}$  come

$$\log_+ z := \log |z| + i \arg_+ z$$

(FE13) (Occhio: non è sempre vero che  $\log(e^z) = z$ ). Mentre è sempre vero, per un qualsiasi ramo del logaritmo, che  $\exp(\log z) = z$  (per definizione!), non è detto che valga la stessa identità a funzioni invertite, cioè  $\log(e^z) = z$ . Ad esempio, sia  $\log z$  il ramo principale del logaritmo. Allora:

$$\log(e^{i3\pi/2}) = \log|e^{i3\pi/2}| + i \operatorname{Arg}(e^{i3\pi/2}) = -i\pi/2 \neq i3\pi/2.$$

(FE14) (Occhio: non è sempre vero che  $\dots$ ). Non è sempre vero che  $\log(wz) = \log w + \log z$  o che  $\log(z^n) = n \log z$ . È facile trovare controesempi.

(FE15) (Derivata del log).  $D(\log z) = 1/z$  (per un ramo qualsiasi!).

(FE16) (Def: potenze con esponente complesso non intero). Sia  $\log z : G \mapsto \mathbb{C}$  un ramo arbitrario del logaritmo. Il ramo corrispondente della funzione  $z^w$  è definito come

$$z^w := e^{w \log z} \quad z \in G.$$

(FE17) (Potenze con esponente complesso non intero. Ramo principale e ramo “più”).

$$\begin{array}{ll} \text{ramo principale} & z^w := \exp(w \log z) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\} \\ \text{ramo “più”} & [z^w]^{(+)} := \exp(w \log_+ z) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z \geq 0\}. \end{array}$$

(FE18) (Potenze con esponente reale non intero. Ramo principale e ramo “più”). Nel caso di esponente *reale* le formule precedenti possono essere semplificate e, usando la definizione del logaritmo, si ottiene

$$\begin{aligned} z^a &= \exp(a \log |z| + ia \operatorname{Arg} z) = |z|^a e^{ia \operatorname{Arg} z} \\ [z^a]^{(+)} &= \exp(a \log |z| + ia \arg_+ z) = |z|^a e^{ia \arg_+(z)} \end{aligned}$$

(FE19) (Caso particolare di esponente reale: radice  $n$ -sima Ramo principale e ramo “più”).

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|} e^{i \operatorname{Arg} z / n} & z \in \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\} \\ \sqrt[n]{z}^{(+)} &= \sqrt[n]{|z|} e^{i \arg_+ z / n} & z \in \mathbb{C} \setminus \{z \geq 0\} \end{aligned}$$

## 8 Mappe elementari

(MAP1)  $w = f(z) = z + a$ . Traslazione.

(MAP2)  $w = f(z) = uz$ . Dilatazione di un fattore  $|u|$  e rotazione attorno all'origine di un angolo  $\arg u$ . Esempio:  $f(z) = 2iz$ , quindi  $u = 2i$ ,  $|u| = 2$  e  $\arg u = \pi/2$ . In questo caso si ha una duplicazione delle dimensioni lineari e una rotazione di 90 gradi (fig. 2).

(MAP3)  $w = f(z) = z^n$ . Il settore di corona circolare  $A = \{\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2, \vartheta_1 \leq \arg z \leq \vartheta_2\}$  si trasforma nel settore di corona circolare  $f(A) = \{\rho_1^n \leq |w| \leq \rho_2^n, n\vartheta_1 \leq \arg w \leq n\vartheta_2\}$  (fig. 3). Nel caso in cui  $n(\vartheta_2 - \vartheta_1) \geq 2\pi$ , l'insieme  $f(A)$  è una corona circolare.

(MAP4)  $w = f(z) = \exp z$ . Il rettangolo  $A = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  si trasforma nel settore di corona circolare  $f(A) = \{e^a \leq |w| \leq e^b, c \leq \arg w \leq d\}$  (fig. 4). Nel caso in cui  $d - c \geq 2\pi$ , l'insieme  $f(A)$  è una corona circolare.

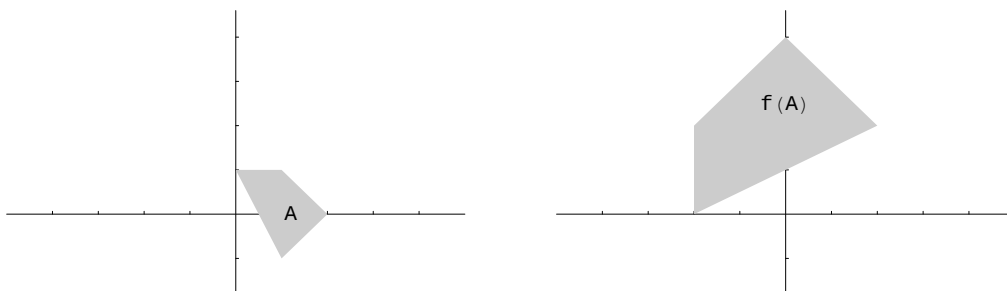


Figura 2: Mappa  $w = 2iz$

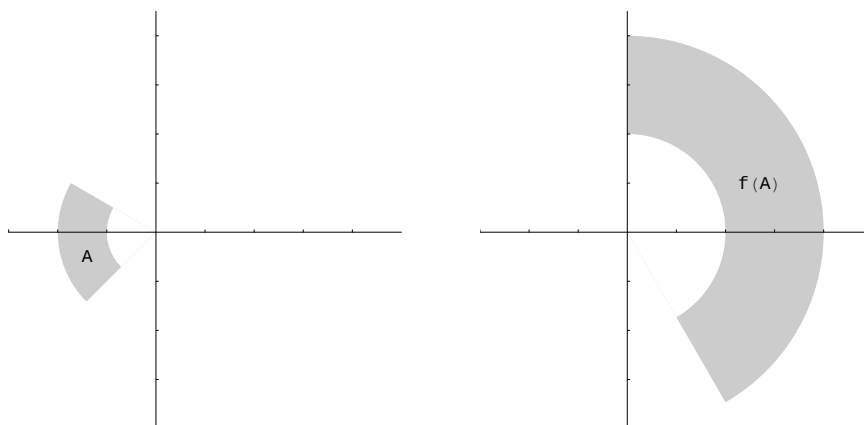


Figura 3: Mappa  $w = z^2$

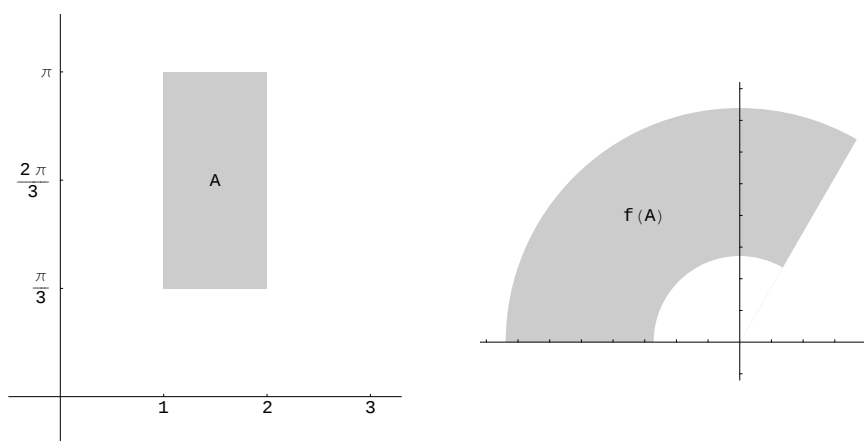


Figura 4: Mappa  $w = \exp z$

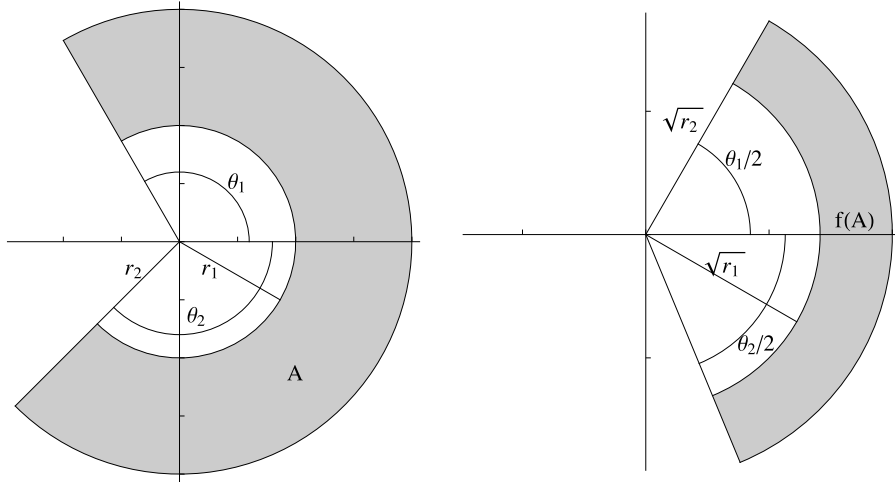


Figura 5: Mappa  $w = \sqrt{z}$

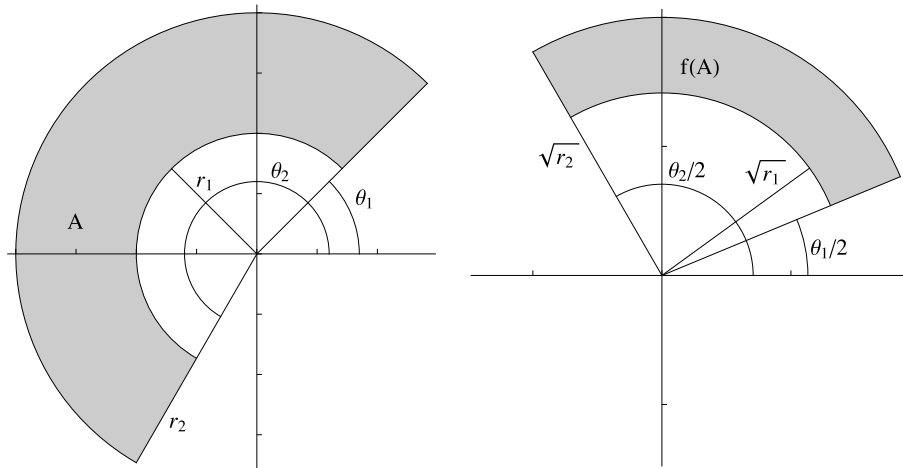


Figura 6: Mappa  $w = \sqrt{z^{(+)}}$

(MAP5)  $w = f(z) = \sqrt[n]{z}$ . Siano  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, \pi)$ . Il settore di corona circolare

$$A := \{re^{i\vartheta} : r_1 \leq r \leq r_2, -\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2\}$$

si trasforma nel settore di corona circolare

$$f(A) := \{re^{i\vartheta} : \sqrt[n]{r_1} \leq r \leq \sqrt[n]{r_2}, -\vartheta_1/n \leq \vartheta \leq \vartheta_2\}.$$

Vedi figura 5.

(MAP6)  $w = f(z) = \sqrt[n]{z}^{(+)}$ . Siano  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 2\pi)$ . Il settore di corona circolare

$$A := \{re^{i\vartheta} : r_1 \leq r \leq r_2, \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2\}$$

si trasforma nel settore di corona circolare

$$f(A) := \{re^{i\vartheta} : \sqrt[n]{r_1} \leq r \leq \sqrt[n]{r_2}, \vartheta_1/n \leq \vartheta \leq \vartheta_2\}.$$

Vedi figura 6.

## 9 Condizioni di Cauchy–Riemann

(CR1) (Teo: analitica  $\Rightarrow$  Cauchy–Riemann). Sia  $G$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e sia  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  analitica. Poniamo

$$z = x + iy \qquad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Allora

(a) valgono le seguenti uguaglianze fra le derivate di  $u$  e  $v$

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

(b) se  $u$  e  $v$  appartengono a  $C^2(G)$ , allora  $u$  e  $v$  sono armoniche, vale a dire  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  e  $v_{xx} + v_{yy} = 0$ .

(CR2) (Teo: Cauchy-Riemann  $\Rightarrow$  analitica). Se  $G$  è una regione,  $u, v \in C^1(G)$  e valgono le condizioni CR, allora la funzione complessa  $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$  è analitica in  $G$ .

(CR3) (Def: armonica coniugata). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$ . Data una funzione armonica  $u : G \mapsto \mathbb{R}$ , la funzione  $v : G \mapsto \mathbb{R}$  è detta *armonica coniugata* di  $u$  se  $f := u + iv$  è analitica su  $G$ .

(CR4) (Teo: esistenza dell'armonica coniugata). Sia  $G \subset \mathbb{C}$  aperto e semplicemente connesso e sia  $u : G \mapsto \mathbb{R}$  armonica. Allora esiste un'armonica coniugata  $v$  di  $u$ .

## 10 Integrazione nel campo complesso

- (I1) (Def: cammino). Un *cammino* in  $\mathbb{C}$  è una funzione continua  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ , in cui  $[a, b]$  è un intervallo dell'asse reale.
- (I2) (Def: cammino regolare). Un cammino  $\gamma$  è detto *regolare* se  $\gamma'$  esiste ed è continua.
- (I3) (Def: cammino regolare a tratti). Un cammino  $\gamma$  è detto *regolare a tratti* (RAT) se esiste una partizione  $(t_i)$  del dominio  $[a, b]$  tale che  $\gamma$  è regolare su ciascun intervallo  $[t_i, t_{i+1}]$ .
- (I4) (Def: traccia di un cammino). La *traccia* del cammino  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$  si indica con  $\{\gamma\}$  ed è definita come  $\{\gamma\} := \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\}$ .
- (I5) (Ma che differenza c'è fra un cammino e la sua traccia?) Un cammino è una funzione, mentre la sua traccia è l'immagine della funzione, quindi un sottoinsieme di  $\mathbb{C}$ . Ad esempio i due cammini

$$\gamma_1(t) := e^{it} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \gamma_2(t) := e^{i2t} \quad t \in [0, 2\pi]$$

sono diversi, poichè il primo percorre la circonferenza unitaria una volta, mentre il secondo la percorre due volte. Però  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  hanno la stessa traccia costituita appunto dalla circonferenza unitaria.

- (I6) (Def: lunghezza di un cammino). La *lunghezza* del cammino  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$  è definita come  $V(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .
- (I7) (Def: integrale lungo un cammino regolare a tratti) Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  continua e sia  $\gamma : [a, b] \mapsto G$  un cammino RAT. Si definisce *integrale di  $f$  lungo  $\gamma$*  la quantità

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

- (I8) (Proprietà dell'integrale).

(a) Se  $u$  e  $v$  sono due numeri complessi, allora  $\int_{\gamma} (uf + vg) = u \int_{\gamma} f + v \int_{\gamma} g$ .

(b)  $\int_{-\gamma} f = - \int_{\gamma} f$

(c)  $\int_{\gamma+w} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z+w) dz$

(d)  $|\int_{\gamma} f| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq V(\gamma) \max_{\{\gamma\}} |f|$ .

- (I9) (Teo: teorema fondamentale del calcolo integrale). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$ , sia  $\gamma : [a, b] \mapsto G$  un cammino RAT. Se  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  è continua ed ammette una primitiva  $F$  su un aperto che contiene  $\{\gamma\}$ , allora

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

- (I10) (Cor: una condizione che implica integrale nullo). Siano  $G$ ,  $f$  e  $\gamma$  come nel teorema precedente. Se  $f$  ammette una primitiva in  $G$  e  $\gamma$  è un cammino chiuso, allora  $\int_{\gamma} f = 0$ .

(I11) (Esempio: una classe importante di funzioni che ammettono una primitiva). Sia  $\gamma$  un cammino RAT chiuso. Allora

$$\int_{\gamma} (w - z)^n dw = 0 \quad \text{se } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{(w - z)^n} = 0 \quad \text{se } n = 2, 3, \dots \text{ e } z \notin \{\gamma\}$$

(I12) (Formula integrale di Cauchy per cammini circolari). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  analitica. Siano  $z_0 \in G$  e  $R > 0$  tale che  $\overline{B}_R(z_0) \subset G$ . Allora

$$\int_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{w - z} dw = 2\pi i f(z) \quad \forall z \in B_R(z_0).$$

(I13) (Analitica implica serie di potenze). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  analitica. Sia  $z_0 \in G$  e  $D := \text{dist}(z_0, G^c)$ . Allora:

(1) la funzione  $f$  può essere sviluppata in serie di potenze come

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad z \in B_D(z_0)$$

(2) i coefficienti  $a_n$  sono dati da

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{n+1}}$$

in cui  $\gamma(t) := z_0 + Re^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$  e  $0 < R < D$ .

(I14) (Teo: stima di Cauchy). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  analitica. Sia  $z_0 \in G$  e  $R > 0$  tale che  $\overline{B}_R(z_0) \subset G$ . Se  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z \in \overline{B}_R(z_0)$ , allora

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M n!}{R^n}$$

(I15) (Teo: teorema di Cauchy per cammini contenuti in un disco). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  analitica. Se  $\gamma$  è un cammino chiuso, RAT, tale che la traccia di  $\gamma$  è contenuta in un disco  $B_R(z_0) \subset G$ . Allora

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

## 11 Teorema di Liouville e Teorema Fondamentale dell'Algebra

(TEO1) (Def: funzione intera). Una *funzione intera* è una funzione analitica su  $\mathbb{C}$ .

(TEO2) (Teo: teorema di Liouville). Se  $f$  è una funzione intera e limitata, allora  $f$  è costante.

(TEO3) (Teo: fondamentale dell'Algebra). Se  $p(z)$  è un polinomio di grado almeno 1 (non costante) allora esiste  $w \in \mathbb{C}$  tale che  $p(w) = 0$ .

(TEO4) (Cor: fattorizzazione dei polinomi). Ogni polinomio di grado  $n > 0$  su  $\mathbb{C}$  può essere scritto nella forma

$$p(z) = \alpha (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_s)^{m_s} \quad \alpha, z_i \in \mathbb{C}, m_i \in \mathbb{N}^*.$$

in cui  $m_1 = \cdots + m_s = n$ .

(TEO5) (Def: molteplicità di uno zero di una funzione analitica). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analitica e sia  $z_0 \in G$  tale che  $f(z_0) = 0$ . Il punto  $z_0$  è detto uno *zero di molteplicità*  $m$ , con  $m$  intero positivo, se esiste  $g$  analitica su  $G$  tale che

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \text{e } g(z_0) \neq 0.$$

(TEO6) (Teo: ogni zero di una funzione analitica ha una molteplicità). Sia  $f$  una funzione analitica su una regione  $G$ , non identicamente nulla. Se  $z_0 \in G$  e  $f(z_0) = 0$ , allora esiste un intero  $m \geq 1$  tale che  $z_0$  è uno zero di molteplicità  $m$  per  $f$ . In particolare,  $m$  è il più piccolo intero positivo tale che  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ .

(TEO7) (Teo: teorema sui punti di accumulazione degli zeri). Sia  $G$  una regione in  $\mathbb{C}$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analitica. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1)  $f$  è identicamente nulla su  $G$
- (2) esiste  $z_0 \in G$  tale che  $f^{(n)}(z_0) = 0$  per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots$
- (3) l'insieme  $\{z \in G : f(z) = 0\}$  ha un punto limite (di accumulazione) in  $G$ .

(TEO8) (Cor: due funzioni analitiche che coincidono su un insieme con un punto limite). Siano  $f$  e  $g$  due funzioni analitiche su una regione  $G$  del piano complesso, e sia  $A$  l'insieme degli  $z \in G$  tali che  $f(z) = g(z)$ . Allora, se  $A$  ha un punto limite in  $G$ , si ha  $f = g$  su tutto  $G$ .

(TEO9) (Molteplicità degli zeri di alcune funzioni elementari). Siano  $a, b \in \mathbb{C}$  con  $a \neq 0$ . Allora:

- (a) La funzione  $f(z) = e^{az}$  non ha zeri.
- (b) La funzione  $f(z) = e^{az} + b$  ha infiniti zeri semplici (di molteplicità 1) se  $b \neq 0$ .
- (c) La funzione  $f(z) = \sin(az) + b$  ha infiniti zeri. Se  $b \neq \pm 1$  gli zeri sono semplici. Se  $b = \pm 1$  gli zeri sono doppi.
- (d) Quanto affermato al punto precedente è valido anche per le funzioni  $\cos(az) + b$ ,  $\cosh(az) + b$ .
- (e) La funzione  $f(z) = \sinh(az) + b$  ha infiniti zeri. Se  $b \neq \pm i$  gli zeri sono semplici. Se  $b = \pm i$  gli zeri sono doppi.

## 12 Teorema di Cauchy e formula integrale di Cauchy

(TC1) (Def: cammini omotopi). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow G$  e  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$  due cammini da  $a$  a  $b$ . Si dice che  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  sono *omotopi in*  $G$  e scrivo  $\gamma_0 \stackrel{G}{\sim} \gamma_1$  se esiste  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$  continua tale che

- (a)  $\Gamma(0, t) = \gamma_0(t)$  per ogni  $t \in [0, 1]$
- (b)  $\Gamma(1, t) = \gamma_1(t)$  per ogni  $t \in [0, 1]$
- (c)  $\Gamma(s, 0) = a$  e  $\Gamma(s, 1) = b$  per ogni  $s \in [0, 1]$

(TC2) (Teo: indipendenza dell'integrale dal cammino). Sia  $f$  una funzione analitica su un aperto  $G$  e siano  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  due cammini RAT, la cui traccia è contenuta in  $G$ . Se  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  sono omotopi in  $G$ , allora

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

(TC3) (Def: cammino omotopo a zero). Un cammino è detto *omotopo a zero* se è omotopo ad un cammino costante (notare che un cammino omotopo a zero è banalmente chiuso).

(TC4) (Teo: Teorema di Cauchy). Sia  $f$  una funzione analitica su un aperto  $G$  e sia  $\gamma$  un cammino RAT, la cui traccia è contenuta in  $G$ . Se  $\gamma$  è omotopo a zero in  $G$ , allora

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

(TC5) (Def: insieme semplicemente connesso). Un sottoinsieme  $G$  di  $\mathbb{C}$  (o, più in generale, un spazio topologico) è detto *semplicemente connesso* se è connesso e ogni cammino chiuso in  $G$  è omotopo a zero in  $G$ .

(TC6) (Cor: teorema di Cauchy per semplicemente connessi). Sia  $f$  una funzione analitica su un aperto  $G$  semplicemente connesso e sia  $\gamma$  un cammino chiuso, RAT, la cui traccia è contenuta in  $G$ . Allora

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

(TC7) (Teo: Esistenza primitiva). Sia  $G$  aperto, semplicemente connesso e  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  analitica. Allora esiste una primitiva  $F$  di  $f$  su  $G$ .

(TC8) (Teo Morera). Sia  $G$  una regione in  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  continua e supponiamo che valga  $\int_T f = 0$  per ogni cammino chiuso triangolare tale che  $\{T\} \subset G$ . Allora  $f$  è analitica.

(TC9) (Def: indice di un cammino rispetto a un punto). Se  $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{C}$  è un cammino chiuso, RAT e  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ , l'*indice* di  $\gamma$  rispetto a  $z$  è definito come

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

(TC10) (Proprietà dell'indice). Proprietà dell'indice

- (a)  $n(\gamma^{-1}, z) = -n(\gamma, z)$ .
- (b)  $n(\gamma \cdot \sigma, z) = n(\gamma, z) + n(\sigma, z)$ .
- (c) Se  $\gamma_1 \stackrel{\mathbb{C} \setminus \{z\}}{\sim} \gamma_2$  allora  $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)$ .

(TC11) (Prop: Proprietà dell'indice/2). Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  un cammino chiuso RAT e sia

$$f(z) = n(\gamma, z) \quad z \in G := \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}.$$

Allora

- (1)  $f$  è costante su ciascuna componente connessa di  $G$
- (2)  $f(z) = 0$  se  $z$  appartiene alla componente illimitata di  $G$ .

(TC12) (Teo: rappresentazione integrale di Cauchy). Sia  $G$  una regione in  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  analitica. Se  $\gamma$  è un cammino chiuso, RAT, tale che  $\gamma \stackrel{\mathcal{G}}{\sim} 0$ , allora

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{w - z} \quad \forall z \in G \setminus \{\gamma\}.$$

(TC13) (Teo: rappresentazione integrale per le derivate). Sotto le stesse ipotesi del punto (TC12), si ha

$$n(\gamma, z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z)^{n+1}} \quad \forall z \in G \setminus \{\gamma\}.$$

### 13 Serie di Laurent

(LAU1) (Espansione in fratti semplici). Siano  $p(z)$  e  $q(z)$  due polinomi su  $\mathbb{C}$  tali che il grado di  $p$  sia inferiore al grado di  $q$ . Se

$$q(z) = c(z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_s)^{m_s},$$

allora si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{q(z)} &= \frac{A_{1,1}}{(z - a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(z - a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(z - a_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{2,1}}{(z - a_2)} + \frac{A_{2,2}}{(z - a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,m_2}}{(z - a_2)^{m_2}} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{A_{s,1}}{(z - a_s)} + \frac{A_{s,2}}{(z - a_s)^2} + \cdots + \frac{A_{s,m_s}}{(z - a_s)^{m_s}} \end{aligned}$$

in cui  $A_{i,j}$  sono opportune costanti (complesse). Esempio:

$$\begin{aligned} \frac{3z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)^2 (z - 5)^3} &= \frac{3z^2 + 2z - 5}{(z + 2i)^2 (z - 2i)^2 (z - 5)^3} \\ &= \frac{A}{(z + 2i)} + \frac{B}{(z + 2i)^2} + \frac{C}{(z - 2i)} + \frac{B}{(z - 2i)^2} \\ &+ \frac{E}{(z - 5)} + \frac{F}{(z - 5)^2} + \frac{E}{(z - 5)^3} \end{aligned}$$

(LAU2) Sviluppo in serie di Taylor/Laurent di  $\frac{1}{a-z}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}} && \text{se } |z-z_0| < |a-z_0| \\ \frac{1}{a-z} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}} && \text{se } |z-z_0| > |a-z_0|\end{aligned}$$

(LAU3) Sviluppo in serie di Taylor/Laurent di  $\frac{1}{a+z}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-z_0)^n}{(a+z_0)^{n+1}} && \text{se } |z-z_0| < |a+z_0| \\ \frac{1}{a+z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a+z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-z_0)^n}{(a+z_0)^{n+1}} && \text{se } |z-z_0| > |a+z_0|\end{aligned}$$

(LAU4) (Notazione).

$$\begin{aligned}\text{An}_{r,R}(z_0) &= \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\} \\ \dot{B}_R(z_0) &= \text{An}_{0,R}(z_0) = B_R(z_0) \setminus \{z_0\}\end{aligned}$$

(LAU5) (Def: singolarità isolata). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$  e sia  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analitica. Si dice che la funzione  $f$  ha una *singolarità isolata* nel punto  $a \in \mathbb{C}$  se esiste  $R > 0$  tale che  $f$  è analitica in  $\dot{B}_R(a)$ .

(LAU6) (Def: serie di Laurent). Una *serie di Laurent* (SdL) è una serie di funzioni del tipo

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \cdots\end{aligned}$$

(LAU7) Sviluppo di una funzione razionale in serie di Laurent.

(LAU8) Sviluppo con centro in una singolarità isolata. Sviluppo *nell'intorno* di una singolarità isolata.

(LAU9) (Teorema: sviluppo in serie di Laurent). Sia  $f$  analitica su  $\text{An}_{r,R}(z_0)$  in cui  $r, R$  soddisfano  $0 \leq r < R \leq \infty$ . Allora:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad z \in \text{An}_{r,R}(z_0)$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w) dw}{(w-z_0)^{n+1}} \quad r < \rho < R$$

(LAU10) (Def: parte singolare della SdL). Sia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione analitica  $f$  nell'intorno di una singolarità isolata  $z_0$  di  $f$ . La *parte singolare della serie di Laurent* è definita come la serie delle potenze negative, vale a dire

$$\begin{aligned} \text{parte singolare} &= \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \dots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} \end{aligned}$$

(LAU11) (Def: classificazione delle singolarità). Sia  $z_0$  una singolarità isolata di  $f$  e sia

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad z \in \dot{B}_R(z_0)$$

lo sviluppo di Laurent di  $f$  nell'intorno di  $z_0$ . La singolarità è detta

- (a) *eliminabile*, se la parte singolare della SdL è assente
- (b) *un polo di ordine  $n$* , se la parte singolare della SdL contiene un numero finito di termini e si ha

$$a_{-n} \neq 0 \quad a_k = 0 \text{ per ogni } k < -n.$$

- (c) *essenziale* se la parte singolare della SdL contiene infiniti termini.

(LAU12) (Prop: relazione fra zeri e singolarità).

- (1) se  $f(z)$  ha uno zero di molteplicità  $m$  in  $z_0$ , e  $g(z)$  ha uno zero di molteplicità  $n$  in  $z_0$ , allora:
  - (a) se  $m \geq n$ ,  $f/g$  ha una singolarità eliminabile in  $z_0$ .
  - (b) se  $m < n$ ,  $f/g$  ha un polo di ordine  $n - m$  in  $z_0$ .
- (2) se  $f$  ha una singolarità essenziale in  $z_0$ , e  $g$  è analitica in  $z_0$  o ha una singolarità eliminabile in  $z_0$  o ha un polo in  $z_0$ , allora  $f \pm g$ ,  $fg$  e  $f/g$  hanno una singolarità essenziale in  $z_0$ .

## 14 Residui

(RES1) (Def: residuo). Sia  $f$  una funzione analitica su  $\dot{B}_R(z_0)$  e sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad z \in \dot{B}_R(z_0)$$

il suo sviluppo in serie di Laurent *nell'intorno della singolarità*  $z_0$ . Il *residuo* di  $f$  in  $z_0$  è definito come

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}.$$

(RES2) (Teorema dei residui). Sia  $f$  analitica in  $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ , in cui  $z_1, \dots, z_m$  sono singolarità isolate di  $f$ . Sia  $\gamma$  un cammino chiuso, regolare a tratti tale che  $\{\gamma\} \cap \{z_1, \dots, z_m\} = \emptyset$  e  $\gamma \stackrel{G}{\sim} 0$ . Allora:

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{k=1}^m n(\gamma, z_k) \operatorname{Res}(f, z_k).$$

(RES3) (Formula per i poli). Se  $f$  ha un polo di ordine  $n$  in  $z_0$ , allora

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} D^{n-1}[(z - z_0)^n f(z)]$$

(RES4) *Metodo di calcolo*: Sia

$$f(z) = \frac{(g_1(z))^{m_1} (g_2(z))^{m_2} \dots (g_s(z))^{m_s}}{(g_{s+1}(z))^{m_{s+1}} (g_{s+2}(z))^{m_{s+2}} \dots (g_t(z))^{m_t}}$$

in cui le  $g_i$  sono funzioni analitiche in  $\dot{B}_R(z_0)$  tali che

$$g_i(z) = \mathcal{O}((z - z_0)^{k_i}) \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

Supponiamo che  $f$  abbia un polo di ordine  $n$  in  $z_0$ . Allo scopo di calcolare la parte singolare della SdL di  $f$  nell'intorno di  $z_0$  è necessario sviluppare ciascuna  $g_i$  fino all'ordine  $k_i + n - 1$  incluso, vale a dire

$$g_i(z) = \underbrace{c_{k_i} z^{k_i} + c_{k_i+1} z^{k_i+1} + \dots + c_{k_i+n-1} z^{k_i+n-1}}_{n \text{ termini}} + \mathcal{O}((z - z_0)^{k_i+n})$$

*Caso particolare*: se  $f$  ha un polo semplice ( $n = 1$ ), è sufficiente sostituire  $g_i(z)$  con il primo termine non nullo del suo sviluppo di Taylor.

(RES5) *Caso particolare del caso particolare*: Se  $f(z) = g(z)/h(z)$  in cui  $g$  e  $h$  sono analitiche, con  $g(z_0) \neq 0$ ,  $h(z_0) = 0$ ,  $h'(z_0) \neq 0$ , allora  $f$  ha un polo di ordine 1 in  $z_0$  e si ha

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

(RES6) Se

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_0)^m}$$

in cui  $p$  è un polinomio di grado  $k \leq m - 2$ , allora  $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$ .

(RES7) (Def: Residuo all'infinito). Sia  $f$  una funzione analitica su  $\operatorname{An}_{R,\infty}(0)$ . Si definisce *residuo all'infinito di  $f$*  la quantità

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f(1/z), 0\right).$$

(RES8) (Teo: Residuo all'infinito). Sia  $f$  una funzione analitica su  $\text{An}_{R,\infty}(0)$  e sia  $\gamma$  un cammino chiuso, RAT, tale che  $\{\gamma\} \subset \text{An}_{R,\infty}(0)$ . Allora

(1)

$$\int_{\gamma} f = -2\pi i n(\gamma, 0) \text{Res}(f, \infty).$$

(2) Se  $f$  ha solo singolarità isolate nei punti  $z_1, \dots, z_s$ , allora

$$\sum_{k=1}^s \text{Res}(f, z_k) + \text{Res}(f, \infty) = 0.$$

(3) Se  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ , allora  $\int_{\gamma} f = 0$ .

## 15 Tecniche di integrazione

**15.1.** Notazione (circonferenza e archi di circonferenza)

$$\begin{aligned} C_R(t) &= Re^{it} & t &\in [0, 2\pi] \\ C_{R,\alpha,\beta}(t) &= Re^{it} & t &\in [\alpha, \beta] \\ C_R^+ &= Re^{it} & t &\in [0, \pi] \\ C_R^- &= Re^{-it} & t &\in [0, \pi] \end{aligned}$$

**15.2.** Notazione

$$\int_{\text{semicircle}} f := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f \quad \gamma_R := [-R, R] \cdot C_R^+$$


**15.3.** Notazione (attenzione questo cammino “gira” in senso orario).

$$\int_{\text{semicircle}} f := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f \quad \gamma_R = [-R, R] \cdot C_R^-$$


**15.4.** Notazione (cammino a fetta di torta), vedi figura 7

$$\int_{\text{sector}} f := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f \quad \gamma_R := [0, R] \cdot C_{R,0,\vartheta} \cdot [Re^{i\vartheta}, 0]$$


**15.5.** Notazione (cammino Pacman)

$$\int_{\text{pacman}} f := \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{r \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_{R,r,\varepsilon}} f$$


in cui  $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$  è il cammino mostrato in figura 8.

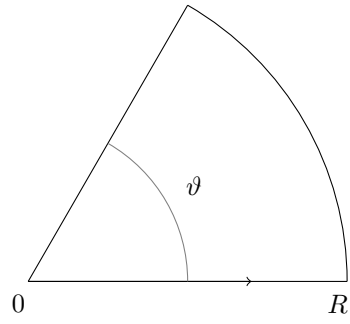


Figura 7: Il cammino a fetta di torta

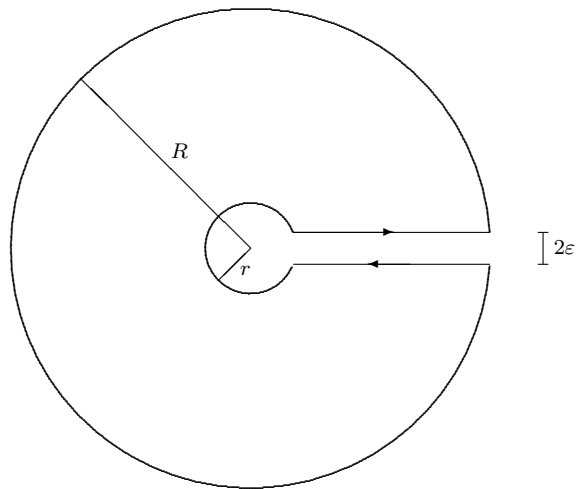


Figura 8: Il cammino Pacman  $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$

**15.6.** Ipotesi (H0): esiste  $R_0 > 0$  tale che  $f$  è analitica su un aperto che contiene  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\} \cup \mathbb{R}$ .

**15.7.** Ipotesi (H1): Vale (H0). Inoltre  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ .

**15.8.** Ipotesi (H2): Vale (H0). Inoltre  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ .

**15.9.** (Proposizione). Se vale (H1), allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f = 0 \quad \gamma_R = C_R, C_R^+, C_R^-, \dots$$

**15.10.** Tecnica di integrazione (TI1). Se vale (H1), si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\text{semicircle}} f(z) dz = \int_{\text{semicircle}} f(z) dz$$

**15.11.** Tecnica di integrazione (TI2). Se  $f$  è pari e vale (H1), si ha

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\text{semicircle}} f(z) dz = \frac{1}{2} \int_{\text{semicircle}} f(z) dz$$

**15.12.** Tecnica di integrazione (TI3). Se  $f(z) = g(z^k)$  con  $k = 2, 3, 4, \dots$  e vale (H1), allora

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{1 - e^{i2\pi/k}} \int_{\text{sector}} f(z) dz \quad \vartheta = \frac{2\pi}{k}.$$

**15.13.** (Lemma del lemma di Jordan). Se  $a > 0$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-a \sin t} dt \leq \frac{\pi}{2a}.$$

**15.14.** (Lemma di Jordan). Se  $f$  soddisfa (H2) e  $\mu \in \mathbb{R}$ , allora

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} f(z) e^{i\mu z} dz &= 0 & \text{se } \mu > 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} f(z) e^{i\mu z} dz &= 0 & \text{se } \mu < 0 \end{aligned}$$

**15.15.** Tecnica di integrazione 4 (TI4). Se  $f$  soddisfa (H2), allora

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\mu x} dx &= \int_{\text{semicircle}} f(z) e^{i\mu z} dz & \mu > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\mu x} dx &= \int_{\text{semicircle}} f(z) e^{i\mu z} dz & \mu < 0 \end{aligned}$$

**15.16.** Tecnica di integrazione 5 (TI5). Se  $f$  soddisfa (H2)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\mu x) dx &= \operatorname{Re} \left[ \int_{\text{arco}} f(z) e^{i\mu z} dz \right] & \mu > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\mu x) dx &= \operatorname{Im} \left[ \int_{\text{arco}} f(z) e^{i\mu z} dz \right] & \mu > 0\end{aligned}$$

**15.17.** Dimostrazione di  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

**15.18.** Calcolo delle trasformate di Fourier di  $1/(1+x^2)$  e  $e^{-x^2}$ .

**15.19. Ipotesi H3:** La funzione  $f$  può essere scritta come un prodotto  $f = gh$ , in cui

- (1)  $g$  è analitica ad eccezione di singolarità isolate che non si trovano su  $\mathbb{R}_+$
- (2)  $h$  è analitica ad eccezione di un taglio lungo  $\mathbb{R}_+$  (esempi: ramo + del logaritmo, di una radice o, più in generale, di una potenza non intera)
- (3)  $\lim_{z \rightarrow \infty} (zf(z)) = 0$
- (4)  $\lim_{z \rightarrow 0} (zf(z)) = 0$ .

**15.20 Proposizione.** *Tecnica di integrazione 6 (TI6). Sia  $f = gh$  e supponiamo che valga l'ipotesi (H3). Allora*

$$\int_0^{\infty} g(x) \Delta h(x) dx = \int_{\bigcirc} g(z) h(z) dz = 2\pi i \sum_{z \neq 0} \operatorname{Res}(f, z).$$

in cui  $\Delta h(x)$  è la discontinuità di  $h$  quando si attraversa il semiasse reale positivo, vale a dire

$$\Delta h(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [h(x + i\varepsilon) - h(x - i\varepsilon)].$$

## 15.1 Sommario formule utili

Sotto le ipotesi discusse precedentemente, valgono le formule seguenti. Nel caso in cui  $g$  sia una funzione razionale  $g = p/q$  le ipotesi sono soddisfatte se

- (a) gli zeri di  $q$  non si trovano su  $\mathbb{R}_+$
- (b)  $\delta := \deg q - \deg p$  soddisfa la condizione indicata nella tabella.

$$(15.1) \quad \int_0^{\infty} x^{\alpha} g(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{z \neq 0} \operatorname{Res} \left( g(z) [z^{\alpha}]^{(+)}, z \right) \quad \alpha \in (-1, \delta - 1)$$

$$(15.2) \quad \int_0^{\infty} g(x) dx = - \sum_{z \neq 0} \operatorname{Res} (g(z) \log_+ z, z) \quad \delta \geq 2$$

$$(15.3) \quad \int_0^{\infty} g(x) \log x dx = \sum_{z \neq 0} \operatorname{Res} \left[ g(z) \left( -\frac{1}{2} (\log_+(z))^2 + \pi i \log_+ z \right), z \right] \quad \delta \geq 2$$

Spesso è conveniente, dal punto di vista del calcolo, usare il ramo principale invece del ramo  $+$ . Per far questo bisogna spostare il cammino di integrazione da  $\mathbb{R}_+$  a  $\mathbb{R}_-$  con la mappa  $x \rightarrow -x$ , vale a dire osservando che

$$\int_0^\infty g(x) h(x) dx = \int_{-\infty}^0 g(-x) h(-x) dx.$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto in precedenza, sotto le stesse ipotesi, si ottengono le seguenti formule in cui sia la potenza  $z^\alpha$  che il logaritmo vanno calcolati usando il ramo principale (attenzione al segno meno in  $g(-z)$ )

$$(15.4) \quad \int_0^\infty x^\alpha g(x) dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \sum_{z \neq 0} \text{Res}(g(-z) z^\alpha, z) \quad \alpha \in (-1, \delta - 1)$$

$$(15.5) \quad \int_0^\infty g(x) dx = \sum_{z \neq 0} \text{Res}(g(-z) \log z, z) \quad \delta \geq 2$$

$$(15.6) \quad \int_0^\infty g(x) \log x dx = \frac{1}{2} \sum_{z \neq 0} \text{Res}[g(-z) (\log z)^2, z] \quad \delta \geq 2$$

Nel caso in

**15.21 Osservazione.** Se  $g(x)$  è reale per  $x \in \mathbb{R}$ , allora posso calcolare eventuali residui che si trovano nel semipiano inferiore come complesso coniugato dei rispettivi residui che si trovano nel semipiano superiore.

**15.22 Osservazione.** Se  $g$  è pari NON conviene usare le (15.2), (15.5). USATE (TI2)!

## 16 Spazi metrici

In questa sezione, solo punti contrassegnati con  $\star$

(SM1)  $\star$  (Def: spazio metrico).

(SM2)  $\star$  (Def: insieme aperto, insieme chiuso). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Un sottoinsieme  $A \subset X$  è detto *aperto in  $X$*  se per ogni  $x \in A$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B_\varepsilon(x) \subset A$ . Un sottoinsieme  $B \subset X$  è detto *chiuso in  $X$*  se il suo complemento  $B^c = X \setminus B$  è aperto.

(SM3) (Prop: unioni e intersezioni di aperti e chiusi). Proprietà dell'unione e dell'intersezione di una collezione finita o infinita di insiemi aperti o chiusi.

(SM4)  $\star$  (Def: successione convergente. Con gli  $\varepsilon$ ). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $x \in X$ . Una successione  $(x_k)_{k=1}^\infty$  di elementi di  $X$  si dice *convergente ad  $x$*  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ intero positivo tale che } \forall k \geq N \text{ si ha } d(x_k, x) < \varepsilon.$$

(SM5)  $\star$  (Def: successione di Cauchy). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Una successione  $(x_k)_{k=1}^\infty$  di elementi di  $X$  si dice *di Cauchy* se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intero positivo  $N$  tale che per ogni  $k, n \geq N$  si ha  $d(x_k, x_n) < \varepsilon$ .

(SM6) (Def: punto di aderenza). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A$  un sottoinsieme di  $X$ . Un punto  $x \in X$  si dice *punto di aderenza di  $A$*  se esiste una successione  $(x_k)_{k=1}^{\infty}$  di elementi di  $A$  tale che  $x_k \rightarrow x$ .

(SM7)  $\star$  (Def: punto di accumulazione). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A$  un sottoinsieme di  $X$ . Un punto  $x \in X$  si dice *punto di accumulazione (o punto limite) di  $A$*  se esiste una successione  $(x_k)_{k=1}^{\infty}$  di elementi di  $A$  tale che  $x_k \neq x$  e  $x_k \rightarrow x$ .

(SM8) (Es: punto di aderenza, ma non di accumulazione). Sia  $X = \mathbb{R}$  e  $A = (0, 1) \cup \{2\}$ . Allora il punto 2 è un punto di aderenza di  $A$ , ma non è un punto di accumulazione. I punti 0 e 1 sono sia punti di aderenza che punti di accumulazione.

(SM9) (Def: chiusura di un insieme).  $\bar{A} := \{x \in X : x \text{ è un punto di aderenza di } A\}$ .

(SM10) (Def: parte interna di un insieme).  $A^\circ := \{x \in A : \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subset A\}$ .

(SM11)  $\star$  (Prop: Caratterizzazione di un insieme chiuso tramite successioni convergenti).  $A$  è chiuso in  $(X, d)$  se e solo se vale l'implicazione

$$(x_n \in A \text{ e } x_n \rightarrow x \in X) \Rightarrow x \in A$$

(vale a dire  $A$  contiene tutti i suoi punti di aderenza).

(SM12)  $\star$  (Def: densità). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e siano  $A$  e  $B$  due sottoinsiemi di  $X$ . L'insieme  $A$  si dice *denso in  $B$*  se  $\bar{A} \supset B$ .

(SM13)  $\star$  (Condizione equivalente alla densità. Con gli  $\varepsilon$ ).  $A$  è denso in  $B$  se e solo se  $\forall x \in B$  e  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $y \in A$  tale che  $d(x, y) < \varepsilon$ .

(SM14) (Condizione equivalente alla densità. Con le successioni convergenti).  $A$  è denso in  $B$  se e solo se  $\forall x \in B$  esiste una successione  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  di elementi di  $A$  tale che  $x_n \rightarrow x$ .

(SM15)  $\star$  (Def: completezza). Uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente in  $X$ .

(SM16) (Prop: completezza per sottoinsiemi di uno spazio metrico completo). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $Y \subset X$ . Lo spazio metrico  $(Y, d)$  è completo se e solo se  $Y$  è chiuso in  $X$ .

(SM17)  $\star$  (Def: funzione continua. Con le successioni). Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \rho)$  due spazi metrici. Una funzione  $f : X \mapsto Y$  si dice *continua* se vale l'implicazione

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x).$$

(SM18) (Def: funzione continua. Con gli  $\varepsilon$ ). Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \rho)$  due spazi metrici. Una funzione  $f : X \mapsto Y$  si dice *continua* se per ogni  $x \in X$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che se  $d(y, x) < \delta$  allora  $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$ .

(SM19)  $\star$  Def: funzione uniformemente continua fra due spazi metrici.

(SM20) Def: funzione Lipschitz fra due spazi metrici.

- (SM21) ★ Def: convergenza puntuale ed uniforme per una successione di funzioni  $f_n : X \rightarrow Y$ .
- (SM22) ★ (Teo: limite di funzioni continue è continuo). Se una successione di funzioni continue  $f_n : X \rightarrow Y$  converge uniformemente alla funzione  $f : X \rightarrow Y$ , allora  $f$  è continua.
- (SM23) (Teo: Test  $M$  di Weierstrass). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  una successione di funzioni tali che
- (a)  $|f_n(x)| \leq M_n$  per ogni  $x \in X$
  - (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ .

Allora le serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  è uniformemente convergente.

## 17 Spazi vettoriali normati

In questa sezione, solo punti contrassegnati con ★

- (SV1) ★ (Definizione di spazio vettoriale).
- (SV2) (Prop). Un sottoinsieme  $W$  di uno spazio vettoriale  $V$  è uno spazio vettoriale se e solo se è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per gli scalari, vale a dire se e solo se valgono le implicazioni
- $$u, v \in W \Rightarrow u + v \in W \qquad v \in W, \alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha v \in W.$$
- (SV3) ★ (Definizione di norma in uno spazio vettoriale).
- (SV4) ★ (Distanza associata ad una norma). Se  $\|\cdot\|$  è una norma nullo spazio vettoriale  $V$ , allora  $d(v, w) := \|v - w\|$  è una distanza.
- (SV5) (Disuguaglianza di Hölder per le successioni e per la funzioni). Per ogni  $p \geq 1$  e  $q$  tale che  $1/p + 1/q = 1$  si ha:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left[ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right]^{1/p} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right]^{1/q}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \leq \left[ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \left[ \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q dx \right]^{1/q}$$

- (SV6) (Disuguaglianza di Minkowski per le successioni e per la funzioni). Per ogni  $p \geq 1$  si ha:

$$\left[ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right]^{1/p} \leq \left[ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right]^{1/p} + \left[ \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right]^{1/p}$$

$$\left[ \int_{\mathbb{R}} |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq \left[ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} + \left[ \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

- (SV7) (Def: spazi di successioni). Definizione di  $\ell_{\infty}$ ,  $\ell_0$ ,  $\ell_p$ ,  $\ell_f$ .

(SV8) ★ (Def: spazi di funzioni). Definizione di  $C_b(\mathbb{R})$ ,  $C_0(\mathbb{R})$ ,  $C_p(\mathbb{R})$ ,  $C_c(\mathbb{R})$ ,  $C^m(\mathbb{R})$ .

(SV9) ★ (Def: norma  $p$  per successioni e funzioni).

$$\|x\|_p := \left[ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right]^{1/p} \quad \|f\|_p := \left[ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad p \geq 1$$

(SV10) ★ (Def: norma uniforme per le funzioni).  $\|f\|_u := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ .

(SV11) (Inclusioni fra i vari spazi).

$$\begin{aligned} \ell_f &\subset \ell_p \subset \ell_0 \subset \ell_{\infty} \subset \mathbb{R}^{\infty} \\ C_c(\mathbb{R}) &\subset C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}) \\ C_c(\mathbb{R}) &\subset C_p(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}) \\ C_p(\mathbb{R}) &\not\subset C_b(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(SV12) (Def). Una successione di successioni  $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  si dice *convergente puntualmente* alla successione  $x$  se converge ad  $x$  componente per componente, cioè se

$$\text{per ogni } k \in \mathbb{N}^* \text{ si ha } \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k.$$

(SV13) (Distanza associata alla convergenza puntuale). Si definisca, per  $x, y \in \mathbb{R}^{\infty}$ ,

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Allora

- (1)  $d$  è una distanza su  $\mathbb{R}^{\infty}$ .
- (2) La successione  $(x^{(n)})$  di elementi di  $\mathbb{R}^{\infty}$  converge puntualmente  $x \in \mathbb{R}^{\infty}$  se e solo se  $d(x^{(n)}, x) \rightarrow 0$ .

(SV14) ★ (Def). Insiemi di vettori  $(u_{\alpha})_{\alpha \in I}$  linearmente dipendenti o indipendenti.

(SV15) (Def). Dimensione di uno spazio vettoriale.

(SV16) ★ (Def: sottospazio generato). Il *sottospazio generato* da un insieme di vettori  $(u_{\alpha})_{\alpha \in I}$  nello spazio vettoriale  $V$  si denota con  $\text{span}\{u_{\alpha} : \alpha \in I\}$  ed è definito come l'insieme di tutti i vettori che possono essere espressi come *combinazione lineare finita* degli  $u_{\alpha}$ , vale a dire quei vettori  $u$  che si possono scrivere come

$$u = c_1 u_{\alpha_1} + \cdots + c_n u_{\alpha_n} \quad n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in I$$

(SV17) (Esempio di sottospazio generato). Sia

$$e^{(k)} := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)_{(k)}$$

Allora  $\text{span}\{(e^{(k)})_{k=1}^{\infty}\} = \ell_f$ .

(SV18) (Def: insieme completo di vettori). Un insieme di vettori  $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$  in uno spazio vettoriale normato  $(V, \|\cdot\|)$  è detto *completo* se  $\text{span}\{u_\alpha : \alpha \in I\}$  è denso in  $V$ , vale a dire se

$$\overline{\text{span}\{u_\alpha : \alpha \in I\}} = V.$$

(SV19)  $\star$  (Condizione equivalente alla completezza per un sistema di vettori. Con gli  $\varepsilon$ ). Un insieme di vettori  $(u_\alpha)$  è completo in  $V$  se e solo se vale la seguente condizione: per ogni  $v \in V$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una combinazione lineare finita degli  $u_\alpha$

$$u = c_1 u_{\alpha_1} + \cdots + c_n u_{\alpha_n}$$

tale che  $\|u - v\| < \varepsilon$ .

(SV20) (Def). Base di uno SVN.

(SV21) (Prop). Nello spazio vettoriale normato  $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$  valgono le identità

$$\overline{\ell_f} = \ell_0 \qquad \overline{\ell_0} = \ell_0.$$

(SV22)  $\star$  (Def). Uno *spazio di Banach* è uno spazio vettoriale normato completo.

(SV23) Esempi di spazi di Banach ( $p \geq 1$ ):

$$\begin{array}{lll} (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty) & (\ell_0, \|\cdot\|_\infty) & (\ell_p, \|\cdot\|_p) \\ (C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) & (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) & \end{array}$$

(SV24) Esempi di SVN non completi ( $p \geq 1$ ):

$$\begin{array}{llll} (\ell_p, \|\cdot\|_\infty) & (\ell_f, \|\cdot\|_\infty) & (\ell_f, \|\cdot\|_p) & \\ (C_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) & (C_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) & (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) & (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) \end{array}$$

(SV25)  $\star$  (Def). Un insieme  $X$  è detto *numerabile* se esiste una corrispondenza biunivoca fra  $X$  e  $\mathbb{N}$ .

(SV26) (Prop). (a) Il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili è numerabile. (b) Un'unione numerabile di insiemi finiti o numerabili è numerabile, vale a dire se  $A_1, A_2, A_3, \dots$  sono numerabili allora la loro unione  $\cup_{i=1}^\infty A_i$  è anch'essa numerabile.

(SV27)  $\star$  (Prop). Sia  $X = \{0, 1\}^\infty$  l'insieme di tutte le successioni di zeri e uni.  $X$  non è numerabile.

(SV28) (Prop).  $\mathbb{R}$  non è numerabile.

(SV29)  $\star$  (Def: spazio metrico separabile). Uno spazio metrico  $(X, d)$  è detto *separabile* se esiste un insieme numerabile  $Y \subset X$  tale che  $Y$  è denso in  $X$ .

## 18 Spazi di Hilbert

In questa sezione, solo punti contrassegnati con  $\star$

In questa sezione  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  è uno spazio euclideo.

(SH1)  $\star$  (Def: definizione di prodotto scalare nel caso reale o complesso).

(SH2)  $\star$  (Prop: disuguaglianza di Cauchy–Schwarz).

(SH3)  $\star$  (Come ottenere una norma a partire da un prodotto scalare). Se  $v \in V$ , definisco  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

(SH4) (Continuità del prodotto scalare). Se  $(u_n)$  e  $(v_n)$  sono 2 successioni in  $V$  ed esistono i limiti  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in V$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \in V$ , allora, per ogni vettore  $w \in V$  si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, w \rangle &= \langle \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, w \rangle = \langle u, w \rangle \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v_n \rangle &= \langle \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \rangle = \langle u, v \rangle\end{aligned}$$

(SH5)  $\star$  (Spazi euclidei pesati). Sia  $\mu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  una funzione continua e positiva. Allora posso definire lo spazio

$$C_2(\mathbb{R}, \mu dx) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mu(x) dx < \infty \right\}$$

Questo è uno spazio vettoriale sul quale posso definire il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) \mu(x) dx.$$

(SH6) (Def: complemento ortogonale di un insieme di vettori).

(SH7) (Proprietà del complemento ortogonale).

- (a)  $X^\perp$  è un sottospazio chiuso
- (b) se  $X \subset Y$  allora  $X^\perp \supset Y^\perp$
- (c)  $X^\perp = \overline{X}^\perp = (\text{span}(X))^\perp = (\overline{\text{span}(X)})^\perp$ .

(SH8) (Esempio: un sottospazio  $W$  di  $\ell_2$  tale che  $W \neq \ell_2$ , ma  $W^\perp = \{0\}$ ).

(SH9)  $\star$  (Def: sistema ortogonale, ortonormale).

(SH10)  $\star$  (Def: base ortogonale, ortonormale).

(SH11)  $\star$  (Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt).

(SH12)  $\star$  (Condizioni per l'esistenza di una base ortogonale in uno spazio euclideo).

(SH13) (Prop: i coefficienti di Fourier sono ottimali). Sia  $(u_k)_{k=1}^\infty$  un sistema ortonormale in  $V$  e sia  $v \in V$ . Poniamo

$$c_k := \langle v, u_k \rangle \quad S_n := \sum_{k=1}^n c_k u_k \quad S_n^\alpha := \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k.$$

in cui  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  sono dei coefficienti arbitrari. Allora  $\|v - S_n\| \leq \|v - S_n^\alpha\|$ .

(SH14) (Prop: disuguaglianza di Bessel). Sia  $(u_k)_{k=1}^\infty$  un sistema ortonormale in  $V$  e sia  $v \in V$ . Se  $c_k := \langle v, u_k \rangle$  sono i coefficienti di Fourier di  $v$  rispetto al sistema ortonormale  $(u_k)_{k=1}^\infty$ , allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|v\|^2.$$

(SH15) (Equivalenza fra l'uguaglianza di Parseval e la possibilità di scrivere un vettore  $v$  come combinazione lineare infinita di un sistema ortonormale).

(SH16)  $\star$  (Prop: un vettore è una combinazione lineare infinita dei vettori di base). Se  $(u_k)_{k=1}^\infty$  è una base ortonormale dello spazio euclideo  $V$ , allora per ogni  $v \in V$  si ha  $v = \sum_{k=1}^\infty c_k u_k$  in cui i  $c_k$  sono i coefficienti di Fourier di  $v$ , vale a dire  $c_k = \langle v, u_k \rangle$ .

(SH17) (Teorema sull'esistenza e l'unicità della proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert separabile).

(SH18) (Caratterizzazione della proiezione ortogonale). Se  $W$  è un sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert  $V$ , allora la proiezione ortogonale di un vettore  $v \in V$  sul sottospazio  $W$  è univocamente definita dalle due condizioni: (1)  $\pi_W v \in W$  e (2)  $(v - \pi_W v) \in W^\perp$ .

(SH19) (Prop: doppio complemento ortogonale). Se  $W$  è un sottospazio dello spazio di Hilbert  $V$ , allora si ha  $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$ .

(SH20)  $\star$  (Polinomi di Hermite)

- (a) Def:  $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$
- (b) Formula di ricorrenza:  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ .
- (c) Equazione differenziale:  $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$ .
- (d) Ortogonalità:  $\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}$ .
- (e) Funzioni di Hermite:  $\psi_n(x) := A_n e^{-x^2/2} H_n(x)$  in cui  $A_n = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2}$ .
- (f) Le funzioni di Hermite  $(\psi_n)_{n=0}^\infty$  sono una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) negli spazi  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $C_2(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$ .
- (g)  $\psi_n$  soddisfa l'equazione di Schrödinger dell'oscillatore armonico, data da (accatagliati a parte)

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} \right] \psi_n(x) = \lambda \psi_n(x). \quad \text{con } \lambda = n + \frac{1}{2}.$$

## 19 Operatori lineari

**Questa sezione non è in programma**

(OL1) (Def: operatore lineare).

(OL2) (Def: norma di un operatore limitato). Siano  $V$  e  $Z$  due spazi vettoriali normati. Se  $T$  è un operatore lineare limitato da  $V$  in  $Z$ , la *norma* di  $T$  è definita come

$$\|T\| := \sup_{x \in V: \|x\|_V \leq 1} \|Tx\|_Z = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Z}{\|x\|_V}.$$

(OL3) (Prop: equivalenza fra limitatezza e continuità di un operatore lineare).

(OL4) (Def: nucleo e immagine di un operatore lineare.  $\text{Ker } T$ ,  $\text{Ran } T$ ).

(OL5) (Prop: proprietà di nucleo e immagine). Sia  $T \in \mathcal{L}(V, Z)$ . Allora: (1) Il nucleo di  $T$  è un sottospazio chiuso di  $V$ . (2). L'immagine di  $T$  è un sottospazio di  $Z$ .

(OL6) (Caso finito dimensionale: matrice associata ad un operatore lineare  $T$ ). Se  $T \in \mathcal{L}(V, Z)$ ,  $(e^{(i)})_{i=1}^n$  è una base di  $V$  e  $(\tilde{e}^{(i)})_{i=1}^m$  è una base di  $Z$ , allora esiste un'unica matrice  $m \times n$   $A$  tale che

$$Te^{(k)} = \sum_{i=1}^m \tilde{e}^{(i)} A_{ik}$$

Se  $Z$  è uno spazio euclideo e la base  $(\tilde{e}^{(i)})_{i=1}^m$  è ortonormale, allora si ha

$$A_{ik} := \langle Te^{(k)}, \tilde{e}^{(i)} \rangle.$$

(OL7) (Azione della matrice associata ad un operatore lineare  $T$  sulle componenti). Se  $v = \sum_{i=1}^n v_i e^{(i)}$  e  $w = Tv = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{e}^{(i)}$ , allora

$$w_i = (Tv)_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} v_k$$

(OL8) (Def: operatori con nucleo integrale). Se  $V$  è uno spazio vettoriale di funzioni e  $T$  è un operatore lineare su  $V$ , si dice che  $T$  possiede un nucleo integrale se esiste una funzione  $K(\cdot, \cdot)$  tale che

$$(Tf)(x) = \int K(x, y) f(y) dy.$$

(OL9) (Def: seminorma). Una *seminorma* su uno spazio vettoriale  $V$  è un'applicazione  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- (a)  $\|v\| \geq 0$ , per ogni  $v \in V$
- (b)  $\|cu\| = |c| \|u\|$  per ogni  $c \in \mathbb{R}$  ( $\mathbb{C}$ ),  $u \in V$ .
- (c)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  per ogni  $u, v \in V$ .

(In altre parole differisce da una norma in quanto si può avere  $\|v\| = 0$  con  $v \neq 0$ ).

- (OL10) (Def: spazio di Schwartz delle funzioni  $C^\infty$  rapidamente decrescenti). Data  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  definisco le seminorme

$$\|f\|_{n,k} := \|x^n D^k f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n f^{(k)}(x)| \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Lo spazio di Schwartz o anche spazio delle funzioni  $C^\infty$  rapidamente decrescenti è definito come

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \|f\|_{n,k} < \infty\}.$$

In altre parole  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  se è  $C^\infty$  e se  $f$  e tutte le sue derivate vanno a zero all'infinito più velocemente dell'inverso di qualsiasi potenza.

- (OL11) (Es: funzioni appartenenti a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ). Esempio: se  $p(x)$  è un polinomio allora la funzione  $f(x) := p(x) e^{-x^2}$  appartiene allo spazio  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

- (OL12) (Def). Se  $p \in [1, \infty)$  si denota con  $L_p(\mathbb{R})$  (o, più comunemente con  $L^p(\mathbb{R})$ ) il completamento dello spazio vettoriale normato  $(C_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ . Per definizione di completamento  $C_p(\mathbb{R})$  è denso in  $L_p(\mathbb{R})$ .

- (OL13) (Teo).  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è denso in  $C_p(\mathbb{R})$ , e quindi anche in  $L_p(\mathbb{R})$  per ogni  $p \in [1, \infty)$ .

- (OL14) (Disuguaglianza sulla norma del prodotto di operatori). Se  $S \in \mathcal{L}(V, W)$  e  $T \in \mathcal{L}(W, Z)$  allora

$$\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$$

- (OL15) (Def: commutatore).  $[S, T] := ST - TS$ .

- (OL16) (Prop: condizione per la convergenza di una serie di potenze di operatori in uno spazio di Banach).

- (OL17) (Prop: condizione per l'esistenza dell'inverso di  $(I - A)$  e sua espressione esplicita come serie di potenze).

- (OL18) (Def). Sia  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . La matrice *hermitiana coniugata* (o *aggiunta*) della matrice  $A$  si denota con  $A^*$  ed è definita come  $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$ .

- (OL19) (Def). Una matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  è detta *hermitiana* (o *autoaggiunta*) se  $A^* = A$ .

- (OL20) (Def). Una matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  è detta *unitaria* se  $A^*A = AA^* = I$ .

- (OL21) (Teorema spettrale finito dimensionale). Se  $A \in M_n(\mathbb{C})$  è hermitiana, allora esiste una base ortogonale di  $\mathbb{C}^n$  costituita da autovettori di  $A$ .

- (OL22) (Def: operatore aggiunto di un operatore lineare  $T$ ).

- (OL23) (Def: operatore autoaggiunto).

- (OL24) (Prop: proprietà dell'operatore aggiunto).

- (OL25) (Prop: relazioni fra il nucleo e l'immagine di  $T$  e  $T^*$ ).
- (OL26) (Def: proiezioni ortogonali).
- (OL27) (Prop: proprietà delle proiezioni ortogonali).
- (OL28) (Def: autovalore, spettro puntuale, spettro continuo, insieme risolvente, risolvente).
- (OL29) (Prop: lo spettro è chiuso). Lo spettro di un operatore lineare limitato su uno spazio di Banach è chiuso in  $\mathbb{C}$ .
- (OL30) (Prop: localizzazione dello spettro all'interno di un disco). Se  $V$  è uno spazio di Banach e  $T \in \mathcal{L}(V)$ , allora lo spettro di  $T$  è contenuto nel disco chiuso di centro 0 e raggio  $\|T\|$ .
- (OL31) (Prop: proprietà dello spettro degli operatori autoaggiunti).
- (OL32) (Prop: condizione sufficiente per  $\lambda \in \sigma(T)$ ). Sia  $T$  un operatore lineare sullo spazio di Banach  $V$  e sia  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Supponiamo che esista una successione  $(v_n)_{n=1}^\infty$  di elementi di  $V$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|Tv_n - \lambda v_n\|}{\|v_n\|} = 0.$$

Allora  $\lambda \in \sigma(T)$ .

- (OL33) (Esempio). Come si può usare il criterio del punto precedente per dimostrare che l'insieme  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$  fa parte dello spettro continuo di  $\vartheta_-$  che agisce in  $\ell_2$ : si prendono “autovettori” di norma infinita e si troncano, trasformandoli in “autovettori approssimati” di norma finita.
- (OL34) (Operatori di “creazione” e “distruzione”). Supponiamo che gli operatori lineari  $T$  ed  $A$  soddisfino la relazione di commutazione  $[T, A] = \mu A$  per un qualche  $\mu \in \mathbb{C}$ . Sia  $u \neq 0$  un autovettore di  $T$  con autovalore  $\lambda$ , vale a dire  $Tu = \lambda u$ . Allora ci sono 2 possibilità per  $Au$ : (1)  $Au$  è un autovettore di  $T$  con autovalore  $\lambda + \mu$ , oppure (2)  $Au = 0$ .

## 20 Serie di Fourier

(SF1) (Sviluppo in serie di Fourier). Per ogni  $f \in L_2[-\pi, \pi]$  si ha

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

in cui

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Inoltre vale l'identità di Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [|a_k|^2 + |b_k|^2]$$

(SF2) (Sviluppo in serie di Fourier degli esponenziali). Per ogni  $f \in L_2[-\pi, \pi]$  si ha

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

in cui

$$c_k = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\|e_k\|_2^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

(SF3) (Sviluppo in serie di Fourier di soli coseni in  $[0, \ell]$ ). Per ogni  $f \in L_2[0, \ell]$  si ha

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

in cui

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx$$

(SF4) (Sviluppo in serie di Fourier di soli seni in  $[0, \ell]$ ). Per ogni  $f \in L_2[0, \ell]$  si ha

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

in cui

$$b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx$$

(SF5) (Def: funzioni DAT). Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è detta *differenziabile a tratti* (DAT) se  $f$  ed  $f'$  sono continue a tratti in  $[a, b]$ . In altre parole  $f$  è differenziabile a tratti in  $[a, b]$  se esiste un insieme finito di punti  $\alpha_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, \dots, n$  tali che

- (a)  $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = b$ .
- (b)  $f$  è differenziabile con derivata continua in ciascun intervallo aperto  $(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ .
- (c) Esistono e sono finiti i limiti

$$\begin{array}{ccccccccc} \lim_{x \rightarrow \alpha_0^+} f(x), & \lim_{x \rightarrow \alpha_1^-} f(x), & \lim_{x \rightarrow \alpha_1^+} f(x), & \dots, & \lim_{x \rightarrow \alpha_n^-} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow \alpha_0^+} f'(x), & \lim_{x \rightarrow \alpha_1^-} f'(x), & \lim_{x \rightarrow \alpha_1^+} f'(x), & \dots, & \lim_{x \rightarrow \alpha_n^-} f'(x) \end{array}$$

(SF6) (Teo: convergenza puntuale della serie di Fourier). Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione  $2\pi$ -periodica continua a tratti e sia  $S_n$  la somma parziale  $n$ -sima di Fourier di  $f$ . Se  $x \in \mathbb{R}$  è un punto in cui esistono sia la derivata destra  $f'_+(x)$  che quella sinistra  $f'_-(x)$  di  $f$ , si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ è continua in } x \\ \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] & \text{nel caso generale.} \end{cases}$$

(SF7) (Convergenza puntuale della serie di Fourier per le funzioni DAT periodiche). Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione  $2\pi$ -periodica differenziabile a tratti e sia  $S_n$  la somma parziale  $n$ -sima di Fourier di  $f$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ è continua in } x \\ \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] & \text{nel caso generale.} \end{cases}$$

(SF8) (Convergenza puntuale della serie di Fourier per le funzioni DAT definite su  $[-\pi, \pi]$ ). Sia  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione differenziabile a tratti e sia  $S_n$  la somma parziale  $n$ -sima di Fourier di  $f$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |x| < \pi \text{ e } f \text{ è continua in } x \\ \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] & \text{se } |x| < \pi \text{ in generale} \\ \frac{1}{2} [f(\pi) + f(-\pi)] & \text{se } x = \pm\pi. \end{cases}$$

(SF9) (Relazione fra i coefficienti di Fourier di  $f$  e quelli di  $f'$ ). Sia  $f \in C[-\pi, \pi]$  con  $f'$  continua a tratti. Siano  $a_k, b_k$  i coefficienti di Fourier di  $f$  e  $a'_k, b'_k$  i coefficienti di Fourier di  $f'$ . Allora

$$(20.1) \quad a_k = -b'_k/k \quad b_k = (a'_k + (-1)^{k+1}a'_0)/k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Se inoltre vale  $f(\pi) = f(-\pi)$  si ha

$$(20.2) \quad a_k = -b'_k/k \quad b_k = a'_k/k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(SF10) (Ricetta 1). Sia  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  e sia  $F$  una primitiva di  $f$ . Sia  $f$  è CAT, la SdF di  $F$  si ottiene nel modo seguente:

- (1) integrare la SdF di  $f$  termine a termine;
- (2) nel termine  $a_0x/2$  (se presente), sostituire  $x$  con la SdF.

$$x \longrightarrow 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}$$

- (3) aggiungere  $A_0/2$ .

(SF11) (Ricetta 2). Sia  $f : [-\pi, \pi]$  continua con  $f'$  continua a tratti. La SdF di  $f'$  si ottiene nel modo seguente:

- (1) derivare la SdF di  $f$  termine a termine;
- (2) aggiungere  $\frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} (1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(kx))$ .

(SF12) Soluzione dell'equazione del calore in una dimensione nell'intervallo  $[0, \ell]$  con condizioni al bordo vario tipo.

## 21 Trasformata di Fourier

**21.1.** In questa sezione  $L_p(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , vale a dire tutte le funzioni sono *a priori* a valori complessi.

(TF1) Definizione di trasformata di Fourier per funzioni  $f \in L_1(\mathbb{R})$ .

(TF2) (Teo). Se  $f \in L_1(\mathbb{R})$  allora  $\mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R})$ .

(TF3) (Prop: Proprietà elementari della trasformata di Fourier). Siano  $f, h \in L_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ . Allora

- (1)  $\mathcal{F}[\alpha f + \beta h] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[h]$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .
- (2)  $\mathcal{F}[\bar{f}](\lambda) = \overline{\mathcal{F}[f](-\lambda)}$ .
- (3) Se  $f$  è reale  $\mathcal{F}[f](\lambda) = \overline{\mathcal{F}[f](-\lambda)}$ .
- (4) Se  $f$  è reale pari  $\mathcal{F}[f]$  è reale e pari.
- (5) Se  $f$  è reale dispari  $\mathcal{F}[f]$  è immaginaria pura dispari.

(TF4) (Esempio di traslazioni e dilatazioni di una funzione). Sia  $\gamma$  la funzione gaussiana, data da  $\gamma(x) := e^{-x^2}$ . Sia  $\gamma_1$  una gaussiana con picco alto il triplo di  $\gamma$ , largo il doppio e centrato nel punto  $x = 9$ . Allora

$$\gamma_1(x) = 3\gamma((x-9)/2).$$

(TF5) (Lista di alcune proprietà della TdF. Alcune sono conseguenze di risultati che appaiono successivamente). Sia  $f \in L_1(\mathbb{R})$  e sia  $\hat{f} := \mathcal{F}[f]$ . Allora si ha, per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

- (1)  $\mathcal{F}[f(-x)](\lambda) = \hat{f}(-\lambda)$
- (2)  $\mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a} \hat{f}(\lambda)$
- (3)  $\mathcal{F}[f(x) e^{iax}](\lambda) = \hat{f}(\lambda - a)$
- (4)  $\mathcal{F}[f(x) \cos(ax)](\lambda) = \frac{1}{2} [\hat{f}(\lambda + a) + \hat{f}(\lambda - a)]$
- (5)  $\mathcal{F}[f(x) \sin(ax)](\lambda) = \frac{1}{2i} [\hat{f}(\lambda - a) - \hat{f}(\lambda + a)]$
- (6)  $\mathcal{F}[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\lambda/a)$  se  $a \neq 0$
- (7)  $\mathcal{F}[f(a(x-b))](\lambda) = \frac{1}{|a|} e^{-i\lambda b} \hat{f}(\lambda/a)$  se  $a \neq 0$
- (8)  $\mathcal{F}[f(ax-b)](\lambda) = \frac{1}{|a|} e^{-i\lambda(b/a)} \hat{f}(\lambda/a)$  se  $a \neq 0$ .
- (9)  $\mathcal{F}[D^k f](\lambda) = (i\lambda)^k \hat{f}(\lambda)$ .
- (10)  $\mathcal{F}[x^k f](\lambda) = i^k (D^k \hat{f})(\lambda)$ .
- (11)  $\mathcal{F}[\hat{f}(s)](t) = 2\pi f(-t)$ .
- (12)  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$

(TF6) (Primo teorema sul legame fra differenziabilità e andamento all'infinito). Sia  $f \in C^{p-1}(\mathbb{R})$  con  $f^{(p)}$  continua a tratti e assumiamo che le funzioni  $f, f', f'', \dots, f^{(p)}$  appartengano tutte a  $L_1(\mathbb{R})$ . Allora

- (1) per ogni  $k = 1, \dots, p$  si ha  $\mathcal{F}(f^{(k)})(\lambda) = (i\lambda)^k \mathcal{F}(f)$ .  
 (2)  $\hat{f}(\lambda)$  tende a zero, quando  $\lambda \rightarrow \infty$  più velocemente di  $1/\lambda^p$ , vale a dire

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^p \hat{f}(\lambda) = 0.$$

- (TF7) (Secondo teorema sul legame fra differenziabilità e andamento all'infinito). Sia  $f \in L_1(\mathbb{R})$  tale che le funzioni  $xf, x^2f, \dots, x^qf$  appartengano tutte ad  $L_1(\mathbb{R})$ . Allora  $\hat{f} \in C^q(\mathbb{R})$ . Inoltre

$$D^k \hat{f} = \mathcal{F}[(-ix)^k f] \quad k = 1, \dots, q.$$

- (TF8) Definizione dello spazio  $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  delle funzioni di Schwartz (o funzioni *rapidamente decrescenti*).

- (TF9) (Prop: invarianza di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  sotto l'azione della TdF). Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  allora  $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ .

- (TF10) (Def: antitrasformata di Fourier). Se  $g \in L_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  si definisce *antitrasformata di Fourier* di  $g$  e si indica con  $\check{g}$ , la funzione

$$\mathcal{F}^a(g)(t) = \check{g}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(s) e^{ist} ds \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (TF11) (Teorema di inversione). Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^a \circ \mathcal{F} &= \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^a = I \quad \text{vale a dire} \quad \mathcal{F}^a = \mathcal{F}^{-1} \\ \mathcal{F}^{-1} &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ P = \frac{1}{2\pi} P \circ \mathcal{F} \\ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} &= 2\pi P \end{aligned}$$

- (TF12) (Esempio di utilizzo del teorema di inversione). Sapendo che

$$(21.1) \quad \mathcal{F} [H(s)e^{-\alpha s}] (t) = \frac{1}{\alpha + it} \quad \alpha > 0$$

posso ottenere la trasformata di Fourier di  $1/(\alpha + it)$  senza doverla calcolare. Infatti, dalla (21.1) si ottiene

$$H(s)e^{-\alpha s} = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{\alpha + it} \right] (s).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[ \frac{1}{\alpha + it} \right] (s) &= 2\pi \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{\alpha + it} \right] (-s) \\ &= 2\pi H(-s) e^{\alpha s} \end{aligned}$$

- (TF13) (Teorema di Plancherel) Se  $f, g \in L_2(\mathbb{R})$  e  $\langle f, g \rangle$  denota il prodotto scalare canonico, si ha

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2 \quad \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$$

(TF14) Definizione del prodotto di convoluzione  $f * g$ .

(TF15) (Prop: proprietà del prodotto di convoluzione).

(a)  $f * g = g * f$

(b)  $(f * g) * h = f * (g * h) =: f * g * h$ .

(c) Se  $a \neq 0$  e  $\tilde{f}(x) = f(ax)$ ,  $\tilde{g}(x) := g(ax)$ , allora  $(\tilde{f} * \tilde{g})(x) = \frac{1}{|a|}(f * g)(ax)$

(TF16) (Teo: convoluzione e trasformata di Fourier). Siano  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$  limitate. Allora

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

(TF17) (Il principio di indeterminazione di H.) Sia  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tale che  $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ . Sia  $\varphi(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[\psi](\lambda)$ . Allora:

(1)  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|^2 d\lambda = 1$ .

(2) Interpretando  $|\psi(x)|^2$  e  $|\varphi(\lambda)|^2$  come densità di probabilità associate rispettivamente alle variabili  $x$  e  $\lambda$ , si ha  $\sigma_x \sigma_\lambda \geq 1/2$ .

## 22 Distribuzioni

(DIS1) (Def: funzioni localmente integrabili). Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *localmente integrabile* se:

(a)  $f$  ha discontinuità isolate.

(b) per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , si ha che l'integrale (possibilmente improprio)  $\int_a^b |f(x)| dx$  è finito.

(DIS2) (Def: funzioni continue a tratti). Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *continua a tratti* se

(a)  $f$  ha discontinuità isolate

(b) per ogni punto di discontinuità  $u$ , esistono e sono finiti i limiti

$$f(u^-) := \lim_{x \rightarrow u^-} f(x) \quad f(u^+) := \lim_{x \rightarrow u^+} f(x)$$

(DIS3) (Prop). Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è continua a tratti allora è localmente integrabile.

(DIS4) (Def).  $\mathcal{K} = C_c^\infty(\mathbb{R})$  è l'insieme delle funzioni su  $\mathbb{R}$  (a valori reali o complessi a seconda del contesto) infinitamente differenziabili a supporto compatto.

(DIS5) (Def). Convergenza nello spazio  $\mathcal{K}$ .

(DIS6) (Def). Una *distribuzione su  $\mathcal{K}$*  è un funzionale lineare continuo  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ , vale a dire un funzionale lineare tale che

$$\text{se } f_n \xrightarrow{\mathcal{K}} f \text{ allora } F(f_n) \rightarrow F(f).$$

(DIS7) (Prop). Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localmente integrabile e sia  $\varphi_g : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$  definita come

$$\varphi_g(f) := \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx \quad f \in \mathcal{K}.$$

Allora  $\varphi_g$  è una distribuzione.

(DIS8) (Def: delta di Dirac).  $\delta_{x_0}(f) := f(x_0)$ .

(DIS9) (Delta di Dirac nella notazione “impropria”).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

(DIS10) (Def: distribuzione theta).

$$\vartheta(f) = \varphi_H(f) = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

(DIS11) (Prop). Sia  $h \in C_1(\mathbb{R})$  non negativa, tale che  $\int_{\mathbb{R}} h = 1$ . Poniamo

$$g_n(x) := n h(nx) \quad x \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{g_n}(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) f(x) dx = \delta_0(f) \quad \forall f \in \mathcal{K}.$$

(DIS12) (Esempio: delta di Dirac ottenuta come limite di gaussiane). Scegliendo al punto precedente  $h(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{g_n} & g_n(x) &:= \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \\ \delta_0(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} & & \text{(notazione “impropria”)} \end{aligned}$$

(DIS13) Definizione di  $P(1/x)$  (parte principale di  $1/x$ ) ed espressione equivalente.

(DIS14) Definizione di  $P(1/x^n)$  (parte principale di  $1/x^n$ )

$$P(1/x^n)(f) := \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^{+K} \frac{1}{x^n} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(DIS15) (Def).  $\mathcal{K}^*$  è l'insieme delle distribuzioni su  $\mathcal{K}$ .

(DIS16) (Def). Operazioni sulle distribuzioni: somma, prodotto per uno scalare.

(DIS17) (Def). Se  $F \in \mathcal{K}^*$  e  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ , si definisce  $(hF)(f) := F(hf)$  per ogni  $f \in \mathcal{K}$ .

(DIS18) (Prop). Siano  $n, m$  due interi positivi. Allora

$$x^n P\left(\frac{1}{x^m}\right) = \begin{cases} x^{n-m} & \text{se } n \geq m \\ P\left(\frac{1}{x^{m-n}}\right) & \text{se } n < m \end{cases}$$

(DIS19) (Esempio).  $x^5 P(1/x^3) = x^2$ , mentre  $x^3 P(1/x^7) = P(1/x^4)$ .

(DIS20) (Def: derivata di una distribuzione).  $(DF)(f) = F'(f) := -F(f')$  per ogni  $f \in \mathcal{K}$ .

(DIS21) (Def). Convergenza nello spazio  $\mathcal{K}^*$ .

(DIS22) (Prop). Ogni distribuzione ha derivate di tutti gli ordini.

(DIS23) (Regola della derivata di un prodotto). Se  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  e  $F \in \mathcal{K}^*$  allora  $(hF)' = h'F + hF'$ .

(DIS24) (Prop: il limite della derivata è uguale alla derivata del limite). Siano  $(F_n)_{n=1}^\infty$  e  $F$  distribuzioni. Se  $F_n \xrightarrow{\mathcal{K}^*} F$ , allora  $F'_n \xrightarrow{\mathcal{K}^*} F'$ .

(DIS25) (Prop). Derivata (nel senso delle distribuzioni) di una funzione differenziabile a tratti.

(DIS26) (Esempi di applicazione della proposizione precedente).

$$\begin{aligned}
D\vartheta &= \delta_0 & \vartheta \text{ è la distribuzione di Heaviside} \\
D \operatorname{sgn}(x) &= 2\delta_0 \\
D \operatorname{sgn}(-x) &= -2\delta_0 \\
D \operatorname{sgn}(\sin x) &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\delta_{2k\pi} - \delta_{(2k+1)\pi}) \\
D[x] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k & [x] \text{ denota la parte intera di } x \\
D[x^2] &= \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_{\sqrt{k}} - \delta_{-\sqrt{k}})
\end{aligned}$$

(DIS27) (Formula per la derivata ennesima della delta di Dirac). Se  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  si ha

$$h(x) \delta_a^{(n)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} h^{(k)}(a) \delta_a^{(n-k)}$$

(DIS28) (Prop).  $D|x - a| = \operatorname{sgn}(x - a)$ .

(DIS29) (Prop). Se  $g \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $D[g(|x|)] = g'(|x|) \operatorname{sgn}(x)$ .

(DIS30) (Esempio).  $De^{-|x|} = -e^{-|x|} \operatorname{sgn}(x)$ .

(DIS31) (Prop).  $D \operatorname{sgn}(x - a) = 2\delta_a = 2\delta(x - a)$ .

(DIS32) Siano  $g$  e  $h$  due funzioni differenziabili a tratti, tali che nessun punto di discontinuità di  $g$  coincide con un punto di discontinuità di  $h$ . Allora si ha

$$D(gh) = (Dg)h + g(Dh).$$

(DIS33) (Prop).  $D(\log |x|) = P(1/x)$ .

(DIS34) (Prop).  $DP(1/x^n) = -nP(1/x^{n+1})$ .

(DIS35) (Sviluppo della “funzione composta della delta di Dirac”). Sia  $b \in C^1$  e supponiamo che  $b$  abbia zeri semplici e isolati nei punti  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , allora si ha

$$\delta[b(x)] = \sum_k \frac{1}{|b'(x_k)|} \delta_{x_k}.$$

Di conseguenza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(b(x)) dx = \sum_k \frac{f(x_k)}{|b'(x_k)|}.$$

Esempio

$$\delta(\cos x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(x - \frac{\pi}{2} - k\pi\right)$$

(DIS36) Risoluzione dell’equazione (potenziale elettrostatico)

$$\Delta V = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

(DIS37) (Def). Trasformata di Fourier di una distribuzione:  $(\mathcal{F}[\varphi])(f) := \varphi[\mathcal{F}f]$ .

(DIS38) La definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione obbedisce al “principio guida”, vale a dire, se  $\varphi$  è una distribuzione associata ad una funzione ordinaria  $g$ , si ha

$$\mathcal{F}(\varphi_g) = \varphi_{\mathcal{F}(g)}$$

(DIS39) Calcolo della trasformata di Fourier di alcune distribuzioni elementari.

(DIS40) (Prop).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \mp i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) \pm i\pi\delta_0$$

(DIS41) Risoluzione dell’equazione (potenziale di Yukawa)

$$(\Delta - m^2) V(x) = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}.$$

(DIS42) Soluzione dell’equazione di Schrödinger nel caso di una particella libera gaussiana con impulso diverso da zero.