

Argomenti

- (1) Sia Arg l'argomento principale e $\arg_+ := \arg_{[0, 2\pi)}$. Determinare $\arg$, Arg e $\arg_+$

$$(a) \quad z = 3e^{i110\pi/7} \quad (b) \quad z = -5e^{i100\pi} \quad (c) \quad z = -2e^{i145\pi/11}$$

Risp: (a) $\arg(z) = \frac{110}{7}\pi + 2k\pi = \frac{12}{7}\pi + 2k\pi$, $\text{Arg}(z) = -\frac{2}{7}\pi$, $\arg_+(z) = \frac{12}{7}\pi$.
 (b) $\arg(z) = 101\pi + 2k\pi = \pi + 2k\pi$, $\text{Arg}(z) = \pi$, $\arg_+(z) = \pi$.
 (c) $\arg(z) = \frac{145}{11}\pi + \pi + 2k\pi = \frac{2}{11}\pi + 2k\pi$, $\text{Arg}(z) = \frac{2}{11}\pi$, $\arg_+(z) = \frac{2}{11}\pi$.

Serie di potenze

- (2) Calcolare il raggio di convergenza

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n \quad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2+3i)^n z^n \quad (c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^4 \left[\frac{1+i}{2+i} \right]^n z^n$$

Risp: (a) $1/3$. (b) $1/\sqrt{13}$. (c) $\sqrt{5/2}$.

- (3) Calcolare il raggio di convergenza

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^\alpha} \quad \text{con } \alpha > 0 & (b) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n & (c) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \\ (d) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n & (e) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} n! e^{-n^\alpha} z^n \quad \text{con } \alpha > 1 \\ (f) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} & (g) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} c^{n^2} z^n \quad \text{con } c \in \mathbb{C} & (h) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n \\ (i) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^{3n} z^{2n} & (j) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2} & (k) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{(n!)^3} z^n \\ (l) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!} & (m) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n!} z^{n!} & (n) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\log n)^4} z^n & (o) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} 3^{(n+1)!} z^{n!} \\ (p) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{\sqrt{n}} z^n & (q) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (i^n - 2)^n z^n & (r) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n \\ (s) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \exp(in^2) z^n & (t) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{5n} & (u) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^4 e^{-n^2} z^n \end{aligned}$$

Risp: (a) ∞ . (b) $1/e$. (c) $1/4$. (d) 1 . (e) ∞ . (f) 1 . (g) 1 . (h) 0 . (i) 1 . (j) $1/3$. (k) 1 . (l) 0 . (m) 1 . (n) 0 . (o) 1 . (p) $1/3$. (q) 1 . (r) ∞ .

- (4) Calcolare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, in cui

$$a_n := \begin{cases} 3^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 4^n & \text{se } n \text{ è dispari, } n > 1000 \\ 5^n & \text{se } n \text{ è dispari, } n \leq 1000 \end{cases}$$

- (5) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} z^n \quad (b) \quad \sum_{p \in \mathbb{N}: p \text{ primo}} z^p$$

Risp: (a) 1 . (b) 1 .

(6) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right)^{n/2} z^n$$

Risp: $\sqrt{2}/\sqrt[4]{3}$.

☆ (7) Determinare i valori di z per i quali le seguenti serie sono convergenti

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n \qquad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

(Sugg. per (b): Si considerino separatamente i 3 casi: $|z| < 1$, $|z| > 1$, $|z| = 1$).

★ (8) Dimostrare che se $0 < \delta < 1$ e (a_n) è una successione decrescente di numeri reali positivi tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente in

$$F := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |z-1| \geq \delta\}.$$

Suggerimento: sia $f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ e sia $w_n := \sum_{k=0}^n z^k$. Usando la formula della “sommatoria per parti” si può scrivere

$$f_n(z) = a_n w_n + \sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k) w_{k-1}.$$

Poiché $a_n \rightarrow 0$ posso trovare N tale che per ogni $n \geq N$ si ha $0 < a_n < \varepsilon$. A questo punto si può dimostrare che f_n è uniformemente di Cauchy e quindi uniformemente convergente in F . Più precisamente si può far vedere che, se $n, m \geq N$ si ha $|f_n(z) - f_m(z)| < 6\varepsilon/\delta$ per ogni $z \in F$.

Mappe

(9) Dato $A \subset \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, determinare l'insieme $f(A)$. Disegnare nel piano complesso gli insiemi A e $f(A)$

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \pi \leq \arg z \leq 5\pi/4\}$, $f(z) = z^2$.

(b) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, \pi/2 \leq \arg z \leq 3\pi/4\}$, $f(z) = z^9$.

(c) A è il cerchio di centro $2i$ e raggio 1. $f(z) = iz + 1$.

☆ (d) A è la retta $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 2\}$. $f(z) = 1/z$.

Risp: (d) Sia C la circonferenza di centro $1/4$ e raggio $1/4$. Allora $f(A) = C \setminus \{0\}$. Sugg: si parametrizzi A come $z = 2 + it$ in cui $t \in \mathbb{R}$. Si scriva $w = 1/z(t) = u + iv$ e si calcoli $u^2 + v^2$.