

Funzioni analitiche, funzioni elementari

(1) Dimostrare che

$$(a) \quad D(\sin) = \cos \quad (b) \quad D(\cos) = -\sin \quad (c) \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(2) Dimostrare che, se $z = x + iy$, si ha

$$(a) \quad \sinh z = -i \sin(iz) \quad (b) \quad \cosh z = \cos(iz)$$

$$(c) \quad |\sin z|^2 = \frac{1}{2} [\cosh(2y) - \cos(2x)] \quad (d) \quad |\cos z|^2 = \frac{1}{2} [\cosh(2y) + \cos(2x)]$$

[FE] (3) Se $z = x + iy$, esprimere la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni in termini di funzioni reali di x e y

$$(a) \quad \sin z \quad (b) \quad \cos z \quad (c) \quad e^{\cos z} \quad (d) \quad \tan z \quad (e) \quad e^{e^z}$$

Risp: (b) $\operatorname{Re}(\cos z) = \cos x \cosh y$. $\operatorname{Im}(\cos z) = -\sin x \sinh y$.

(e) $\operatorname{Re}(e^{e^z}) = \exp(e^x \cos y) \cos(e^x \sin y)$. $\operatorname{Im}(e^{e^z}) = \exp(e^x \cos y) \sin(e^x \sin y)$.

(4) Trovare tutte le soluzioni

$$(a) \quad \sin z = 0 \quad (b) \quad \cos z = 0 \quad (c) \quad \cosh z = 0 \quad (d) \quad \sin z = \frac{4i}{3} \quad (e) \quad \tan z = \frac{5i}{3}$$

Risp: (a) $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (c) $z = i(\pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. (d) $z = k\pi + i(-1)^k \log 3$, $k \in \mathbb{Z}$. (e) $z = (k + 1/2)\pi + i \log 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

(5) Dimostrare che

$$(a) \quad |\cosh z| \leq \cosh |z| \quad (b) \quad |\sinh z| \leq \sinh |z|$$

(6) Dimostrare che

$$(a) \quad \sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \quad (b) \quad \sinh(u + v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v$$

$$(c) \quad \cosh(2z) - 1 = 2 \sinh^2 z \quad (d) \quad \cosh(2z) + 1 = 2 \cosh^2 z$$

$$(e) \quad D(\sinh) = \cosh \quad (f) \quad D(\cosh) = \sinh$$

(7) Dimostrare che

$$(a) \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \quad (b) \quad |\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$(c) \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y = -\sin^2 x + \cosh^2 y$$

$$(d) \quad |\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y = \cosh^2 x - \sin^2 y$$

(Sugg: $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \dots$)

(8) Dimostrare che

$$(a) \quad \sinh(z + i\pi) = -\sinh z \quad (b) \quad \cosh(z + i\pi) = -\cosh z$$

(9) Trovare tutte le soluzioni

$$(a) \quad e^z = -1 \quad (b) \quad e^z = 2 + 2i$$

$$(c) \quad \cosh z = \frac{1}{2} \quad (d) \quad \sinh z = i \quad (e) \quad \cosh z = -2$$

Risp: (a) $i(2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (c) $\pm i(\pi/3 + 2k\pi)$. (d) $i(\pi/2 + 2k\pi)$. (e) $\pm \log(2 + \sqrt{3}) + i(2k + 1)\pi$.

(10) Calcolare (usare il ramo principale di $\sqrt{z}$ e delle potenze con esponente non intero)

$$\begin{array}{llll} (a) \log(1+i) & (b) \log(1-i) & (c) \log_+(1-i) & (d) \log(-1+i0) \\ (e) \log(-1-i0) & (f) \sqrt{i} & (g) \sqrt{-4+i0} & (h) \sqrt{-4-i0} \quad (i) i^i \\ (j) (-i)^{1/\pi} & (k) (1-i)^{4i} & & \end{array}$$

Risp: (a) $\log 2/2 + i\pi/4$. (b) $\log 2/2 - i\pi/4$. (c) $\log 2/2 + i7\pi/4$. (d) $i\pi$. (e) $-i\pi$. (i) $e^{-\pi/2}$. (j) $e^{-i/2}$. (k) $\exp[\pi + i2\log 2]$.

(11) Far vedere che, se $z = (-1+i)$, $\log(z^2) \neq 2\log z$

(12) Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{llll} (a) \frac{z^4 + z^3 + i}{z^2 + i} & (b) e^{z^2+3} & (c) \sinh(e^{\cosh z}) & (d) \log(1-iz) \quad (e) \sqrt{z^3-1} \\ (f) \log(1+z^2) & (g) \log[(1+z)^2] & (h) \sqrt{1-z^2} & (i) z^z \quad (j) \log[(\log z)^2] \end{array}$$

Risp: (d) $\mathbb{C} \setminus \{-is : s \geq 1\}$. (f) $\mathbb{C} \setminus \{\pm is : s \geq 1\}$. (j) $\mathbb{C} \setminus (\{z \leq 0\} \cup \{|z| = 1\})$.

(13) Data la funzione f e l'insieme $A \subset \mathbb{C}$, determinare e disegnare su 2 grafici separati, gli insiemi A e $f(A)$

$$\begin{array}{ll} (a) f(z) = e^z & A = \text{asse } x \\ (c) f(z) = e^z & A = \{\text{Im } z = \pi\} \\ (e) f(z) = \log z & A = \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\} \\ (g) f(z) = \sqrt{z} & A = \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\} \end{array} \quad \begin{array}{ll} (b) f(z) = e^z & A = \text{asse } y \\ (d) f(z) = e^z & A = \{\text{Re } z = -1\} \\ (f) f(z) = \log z & A = \{|z| = 1, z \neq -1\} \\ (h) f(z) = \sqrt{z} & A = \{-\pi/3 \leq \text{Arg } z \leq \pi/2\} \end{array}$$

Risp: (a) $f(A) = (0, \infty)$. (c) $f(A) = \{z = x : x < 0\}$. (d) $f(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/e\}$. (f) $f(A) = \{z = iy : |y| < \pi\}$.

(14) Per quali valori di z la seguente serie è convergente?

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$$

Varie

[FE] (15) Sia $z = i\sqrt{3} - 1$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a) \text{Re}(z^{10}) \quad (b) |(-i)^z| \quad (c) \text{Arg}(z^i)$$

Risp: (a) $-2^9 = -512$. (b) $e^{\pi\sqrt{3}/2}$. (c) $\log 2$.

(16) Sia $z = \sqrt{3} - i$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a) \text{Im}(z^{10}) \quad (b) |(1-i)^z| \quad (c) \text{Re}(z^{-i})$$

Risp: (a) $2^9\sqrt{3}$. (b) $\exp[\frac{1}{2}\sqrt{3}\log 2 - \pi/4]$. (c) $e^{-\pi/6} \cos \log 2$.

11-12/S2 (17) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $z^i = 1+i$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Quante di queste soluzioni appartengono all'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq e^{10\pi}\}$?

11-12/S3 (18) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione (usare il ramo principale per definire la potenza)

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^z = -2.$$

Disegnare sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del quadrato di lato 50 centrato nell'origine. Quante sono queste ultime?