Condizioni di Cauchy–Riemann, funzioni armoniche

(1) Determinare i valori di $z = x + iy \in \mathbb{C}$ in cui esiste $f'(z)$

$$(a)\quad f(z) = z^2\, \operatorname{Re} z \qquad (b)\quad f(z) = x^2 + iy^2 \qquad (c)\quad f(z) = z - \bar{z}$$

Risp: (a) $z = 0$. (b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$. (c) Mai.

(2) Dimostrare che $f(z) = \bar{z} \exp[\cosh(z^2)]$ non è analitica.

(3) Trovare l'armonica coniugata di

$$(a)\quad u(x, y) = x^3 - 3x\, y^2 \qquad (b)\quad u(x, y) = e^{-x}\left[(1 + x)\cos y + y \sin y\right] .$$

(4) Trovare l'armonica coniugata di u

$$(a)\quad u(x, y) := \frac{1 + x}{(1 + x)^2 + y^2} \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0$$

$$(b)\quad u(x, y) := e^{-x}\,(x\, \sin y - y \cos y) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(5) Trovare un polinomio armonico $P(x, y)$ che contenga il termine x^4.

Risp: $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

(6) Trovare tutti i polinomi armonici $P(x, y)$ tali che $P(x, y)^2$ è ancora armonico (sono pochi).

Volta la pagina ☞