Integrali

(1) Scrivere esplicitamente in termini di una parametrizzazione di γ l'integrale $\int_\gamma f(z)\,dz$, nel caso in cui γ è dato da

(a) il triangolo $[0, 1, i, 0]$ percorso in senso antiorario

(b) la circonferenza di centro i e raggio R percorsa 2 volte in senso orario

(c) il quadrato di centro in 0 e lato uguale a 2, percorso in senso antiorario

Risp: (a) $\int_0^1 f(t)\,dt + (i-1)\int_0^1 f((1-t)+it)dt - i\int_0^1 f(it)dt$.

(2) Se γ è la spezzata $[0, 1, 2+i, 5+i, 7+3i, \log i, i^i, 2+i, e^{e^{2-i}}, i]$. Calcolare (senza fare troppi calcoli)

$$\int_\gamma \cos z\, dz\,.$$

(3) Calcolare, usando la definizione,

$$(a)\quad \int_{|z|=1} \overline{z}\, dz \qquad\qquad (b)\quad \int_\gamma \frac{dz}{z} \qquad \gamma = [1-i,\ 1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i]\,.$$

Risp: (b) $2\pi i$.

(4) Dimostrare che, se γ è il quadrato $[1, i, -1, -i, 1]$

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{\overline{z}^4}\right| \le 16\sqrt{2}$$

(Sugg: usare la proprietà degli integrali che dice che il modulo dell'integrale è ...)

Sviluppi, CR

10-11/S1 (5) Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calcolare (usare il ramo principale del log)

$$(a)\quad \mathrm{Im}(z^8) \qquad\qquad (b)\quad \log(z^8) \qquad\qquad (c)\quad |i^z|$$

Risp: (a) $2^7\sqrt{3}$. (b) $8\log 2 + i2\pi/3$. (c) $e^{-\sqrt{3}\pi/2}$.

(6) Trovare l'armonica coniugata alla funzione

$$u(x,y) := e^{-y}\big(x\cos x - y\sin x\big) \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

(7) Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z-z_0)^n)$ nel limite $z \to z_0$

(a) $z_0 = 0,\ \tan\tan\tan z$ $\qquad$ (b) $z_0 = \pi/2,\ \cos\cos\cos z$

(c) $z_0 = 0,\ \cos[\log(1+z) - \sin z] - 1$ $\qquad$ (d) $z_0 = 0,\ \exp\sin z - 1$

(e) $z_0 = 0,\ \cos[\log(1+z) + \sin z] - 1$ $\qquad$ (f) $z_0 = 0,\ \log\cos(z^2)$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z)$. (b) $\mathcal{O}(1)$. (c) $\mathcal{O}(z^4)$. (d) $\mathcal{O}(z)$. (e) $\mathcal{O}(z^2)$. (f) $\mathcal{O}(z^4)$.

(8) Verificare il seguente sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^3

$$\frac{z\, e^z}{\cosh z} = z + z^2 + \underline{\mathcal{O}}(z^4)\,.$$

(9) Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^4

$$(a)\quad \frac{z + \sin^2 z}{\cos z} \qquad\qquad (b)\quad \frac{\sin(z^2)\, e^z}{2 + \sin z}$$

Risp: (a) $z + z^2 + z^3/2 + z^4/6 + \underline{\mathcal{O}}(z^5)$. (b) $z^2/2 + z^3/4 + z^4/8 + \underline{\mathcal{O}}(z^5)$.

(10) Sia G una regione in $\mathbb{C}$ e sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Dimostrare che se $|f|$ è costante allora f è costante. (Sugg: porre $f = u + iv$ ed usare ...).