Integrali 2

10-11/E1 (1) Sia X l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^i = 1 + i\sqrt{3}$ (usare il ramo principale per definire la potenza).

(a) Determinare X.
(b) Determinare i punti di accumulazione di X in $\mathbb{C}$ (se esistono).
(c) Quante di queste soluzioni appartengono all'anello $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 100\}$?

Risp: (a) $X = \{z_k : k \in \mathbb{Z}\}$ in cui $z_k := \exp\big[\pi/3 + 2k\pi - i\log 2\big]$. (c) 1.

(2) Sia p un polinomio di grado n le cui radici si trovano tutte in $B_R(0)$ con $R > 0$. Dimostrare che

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = 2\pi i n\,.$$

(Sugg: scrivere p in forma fattorizzata rispetto alle radici. Provate con un esempio, tipo $p(z) = (z-1)^4(z+i)^7$, per capire cosa succede).

10-11/S2 (3) Sia f una funzione analitica sul primo quadrante $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \le \operatorname{Re} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 15 + 10i$?

(4) Sia f una funzione analitica sulla semistriscia $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} z < 22,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \le \operatorname{Im} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 15 + 10i$?

(5) Calcolare il raggio di convergenza delle serie di Taylor centrata in 0 (sugg: non è necessario calcolare lo sviluppo in serie)

$$(a)\quad \frac{\cosh\left(e^{z^5}\right)}{1+z+z^2} \qquad (b)\quad \tanh z \qquad (c)\quad \frac{e^{z^2}}{1+\sin(2z^3)}$$

Risp: (a) 1. (b) $\pi/2$. (c) $\sqrt[3]{\pi/4}$.

12-13/E1 (6) Si considerino gli sviluppi in serie di Taylor della funzione $f(z) = \tan(z^2)$ con centro rispettivamente in 0 e i.

$$(a)\quad \tan(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \tan(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, (z-i)^n\,.$$

Determinare i raggi di convergenza R_a ed R_b delle serie (a) e (b).
Risp: $R_a = \sqrt{\pi/2}$, $R_b = \sqrt{\pi/2} - 1$.

☆ (7) Sia $u : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione armonica tale che $u(z) \ge 3$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dimostrare che u è costante. (Sugg: sia v l'armonica coniugata di u e sia $f := u + iv$. Si consideri la funzione $g = \exp(-f)$. Quali proprietà ha g?)

(8) Trovare gli zeri con relative molteplicità delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{llllll}
(a) & z^3(z+3)^5(z^2+1)^4 & (b) & z^7+3 & (c) & (z^7+3)^3 \\
(d) & e^{2z}+i & (e) & 2\sin(z/2)-1 & (f) & \sin(z/2)-1 \\
(g) & (\sin(z/2)-1)^3 & (h) & \sin^2(z)-1 & (i) & \cosh z \\
(j) & \sin(z^2) & (k) & e^{\pi z^2}-1 & &
\end{array}$$

Risp: (a) 0 molt. 3. -3 molt. 5. $\pm i$ molt. 4. (b) $\sqrt[7]{3}\exp[i(\pi/7 + 2k\pi/7)]$, $k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, molt. 1. (g) $\pi(1+4k)$, $k \in \mathbb{Z}$, molt. 6. (h) $\pi(1/2 + k)$, $k \in \mathbb{Z}$, molt. 2. (j) 0 molt. 2. $\pm\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}^*$, molt. 1. $\pm i\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}^*$, molt. 1.