

Serie di Laurent

(1) Sviluppare in serie di Laurent negli insiemi indicati.

$$\frac{z}{(z^2 + 4)^2} \quad (a) \dot{B}_4(2i) \quad (b) \text{An}_{2,\infty}(0)$$

$$\text{Risp: (a) } -\frac{i}{8(z-2i)^2} - \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2(4i)^{n+3}} (z-2i)^n. \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)4^n}{z^{2n+3}}.$$

[SL] (2) Sviluppare in serie di Laurent negli insiemi indicati. Scrivere sia lo sviluppo completo che lo sviluppo esplicito di tutti i termini non nulli $c_n(z-z_0)^n$ con n compreso fra -2 e 1 .

$$f(z) = \frac{z^2 + 5z - 10}{(z-1)^2(z+3)} \quad (a) \dot{B}_4(1), \quad (b) \dot{B}_4(-3)$$

$$\text{Risp: (a) } -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{4^{n+1}} = -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} - \frac{1}{4} + \frac{z-1}{16} - \frac{(z-1)^2}{64} + \dots \quad (b) -\frac{1}{z+3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+9}{4^{n+2}} (z+3)^n = -\frac{1}{z+3} - \frac{9}{16} - \frac{5}{32}(z+3) - \frac{11}{256}(z+3)^2 + \dots$$

(3) Sviluppare in serie di Laurent negli insiemi indicati. Scrivere sia sviluppo completo che lo sviluppo esplicito di tutti i termini non nulli $c_n(z-z_0)^n$ con n compreso fra -2 e 2 .

$$(a) (z+1)^2 e^{1/z} \quad \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$(b) z^2 \cos(2/z^2) \quad \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\text{Risp: (a) } z^2 + 3z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+5n+7}{(n+2)!} \frac{1}{z^n}; \quad \frac{7}{8z^2} + \frac{13}{6z} + \frac{7}{2} + 3z + z^2.$$

(4) Determinare e classificare tutte le singolarità isolate

$$(a) \frac{e^{z-1} \sin z}{z^3(z-4)^5(z-2i)^7} \quad (b) \frac{\cos(1/z)(z^2-4)^2}{\sin(\pi z)^3 e^{z^2}} \quad (c) \frac{(z^4-1) \exp\left(\frac{1}{z+2}\right)}{e^{\pi z} + 1}$$

$$\text{Risp: (a) } z=0 \text{ polo } 2, z=4 \text{ polo } 5, z=2i \text{ polo } 7. \quad (b) z=0 \text{ essenziale, } z=k, k \text{ intero } k \notin \{0, -2, 2\}, \text{ polo } 3, z=\pm 2 \text{ polo } 1. \quad (c) z=i(2k+1), k \notin \{-1, 0\} \text{ polo } 1, z=\pm i \text{ eliminabile, } z=-2 \text{ essenziale.}$$

[SL] (5) Determinare le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$(a) \frac{z^2(z^2-4)}{1-\cos(2\pi z)} \quad (b) \frac{\sin(1/z)}{z^2(z^2+1)}$$

$$\text{Risp: (a) } z=0 \text{ eliminabile, } z=2 \text{ e } z=-2 \text{ poli di ordine } 1, z=k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 2, -2\} \text{ polo di ordine } 2. \quad (b) z=0 \text{ essenziale } z=i \text{ e } z=-i \text{ poli di ordine } 1.$$

11-12/S1 (6) Determinare tutte le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$(a) \frac{e^{i\pi z/3} - 1}{z(z^2+4)^2(z-6)^3} \quad (b) \frac{1}{e^{\sin z}} \quad (c) \frac{1}{\sin(z^2)}.$$

$$\text{Risp: (a) } z=0 \text{ eliminabile, } z=\pm 2i \text{ polo di ordine } 2, z=6 \text{ polo di ordine } 2. \quad (b) \text{ Non ci sono singolarità.} \quad (c) z=0 \text{ polo di ordine } 2, z=\pm\sqrt{k\pi}, k=1, 2, 3, \dots, \text{ polo di ordine } 1, z=\pm i\sqrt{k\pi}, k=1, 2, 3, \dots, \text{ polo di ordine } 1.$$

(7) Determinare il tipo di singolarità in $z=0$. Nel caso di un polo determinare l'ordine del polo e trovare la parte singolare.

$$(a) \frac{\sin z}{z} \quad (b) \frac{1-\cos z}{z} \quad (c) \frac{\log(1+z)}{z^2} \quad (d) \frac{1}{(1-e^z)}$$

$$(e) \frac{1}{(e^z-1)^2} \quad (f) \frac{1}{z(1-\cos z)} \quad (g) \frac{e^{z^2}}{\sin(2z)(1-\cos z)} \quad (h) \frac{z(1+z^2)e^{e^z}}{\sin(z^2) \tanh z}$$

$$\text{Risp: (d) } -\frac{1}{z}. \quad (e) \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}. \quad (f) \frac{2}{z^3} + \frac{1}{6z}. \quad (g) \frac{1}{z^3} + \frac{7}{4z}. \quad (h) \frac{e}{z^2} + \frac{e}{z}.$$

- (8) Determinare il tipo di singolarità in z_0 . Nel caso di un polo determinare l'ordine del polo e trovare la parte singolare.

$$(a) \frac{1 - \cos z}{z^5} \quad (z_0 = 0) \quad (b) \frac{e^z}{z \sinh z} \quad (z_0 = 0) \quad (c) \frac{z^2 e^z}{(\cos z)^3} \quad (z_0 = \pi/2)$$

Risp: (b) $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$. (c) $-\frac{e^{\pi/2} \pi^2}{4(z-\pi/2)^3} - \frac{e^{\pi/2} \pi(4+\pi)}{4(z-\pi/2)^2} - \frac{e^{\pi/2} (2+\pi)^2}{4(z-\pi/2)}$

- (9) Per ciascuna singolarità di f determinarne la natura e calcolare la corrispondente parte singolare

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$$

Risp: $z = 0$ polo ordine 3. $f(z) = 1/z^3 + 1/(6z) + \mathcal{O}(z)$. $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ polo semplice. $f(z) = (-1)^k / (k\pi)^2 1/(z - k\pi) + \mathcal{O}(1)$.

- (10) Verificare che

$$\frac{e^{z^2}}{\sinh^2 z} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{3} + \frac{7}{30} z^2 + \mathcal{O}(z^4)$$

- [SL] (11) Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di f

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1 - \cos z)}$$

Risp: $f(z) = \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{7}{6z} + \mathcal{O}(1)$.

- (12) Determinare l'ordine n del polo in $z = 0$. Dovendo calcolare la parte singolare dello sviluppo di Laurent di f in $z = 0$, è necessario sviluppare $\sin z$ in serie di potenze fino all'ordine z^m (incluso). Determinare m .

$$(a) f(z) = \frac{1}{z^4 \sin z} \quad (b) f(z) = \frac{\sin z}{z^4} \quad (c) f(z) = \frac{1}{(\sin z)^4}$$

$$(d) f(z) = \frac{1}{z - \sin z} \quad (e) f(z) = \frac{z}{(1 - \cos z)(z - \sin z)}$$

Risp: (a) $n = 5$, $m = 5$. (b) $n = 3$, $m = 3$. (c) $n = 4$, $m = 4$. (d) $n = 3$, $m = 5$. (e) $n = 4$, $m = 6$.

- (13) Trovare la parte singolare dello sviluppo di Laurent con centro in (a) $z = 0$, (b) $z = i\pi$, della funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{z(\sinh z)^3}$$

Risp: (a) $\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3z} + \mathcal{O}(1)$ (b) $\frac{1}{i\pi} \frac{1}{(z-i\pi)^3} + \frac{1-i\pi}{\pi^2} \frac{1}{(z-i\pi)^2} + \frac{\pi+i}{\pi^3} \frac{1}{z-i\pi} + \mathcal{O}(1)$.