

Residui

- (1) Determinare le singolarità isolate, la loro natura e, per ciascuna singolarità calcolare il rispettivo residuo.

$$\begin{array}{llll} (a) \frac{z^2 + 3}{z(z+2)(z-1)^2} & (b) \left(\frac{z}{2z+1}\right)^3 & (c) \tanh z & (d) \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} \\ (e) \frac{\log z}{(1+z^2)^2} & (f) (1+z)^4 \exp(1/z^2) & (g) \frac{z^2 + \pi^2}{e^z + 1} \end{array}$$

Risp: (a) $z = 0$, polo 1, $\text{Res}(f, 0) = 3/2$. $z = -2$, polo 1, $\text{Res}(f, -2) = -7/18$. $z = 1$, polo 2, $\text{Res}(f, 1) = -10/9$. (b) $z = -1/2$, polo 3, $\text{Res}(f, -1/2) = -3/16$. (c) $z_k = i(\pi/2 + k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Sono tutti poli ord. 1, $\text{Res}(f, z_k) = 1$. (d) $z = i\pi$, polo 1, $\text{Res}(f, i\pi) = i/(2\pi)$. $z = -i\pi$, polo 1, $\text{Res}(f, -i\pi) = -i/(2\pi)$. (e) $z = i$, polo 2, $\text{Res}(f, i) = (\pi + 2i)/8$. $z = -i$, polo 2, $\text{Res}(f, -i) = (\pi - 2i)/8$. (f) $z = 0$, essenziale, $\text{Res}(f, 0) = 6$. (g) $z_k = i\pi(2k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se $k = 0$ o $k = -1$ la singolarità è eliminabile (quindi il residuo è nullo). Se $k \notin \{0, -1\}$ allora z_k è un polo di ordine 1 e $\text{Res}(f, z_k) = 4\pi^2 k(k+1)$.

- (2) Calcolare

$$\begin{array}{ll} (a) \int_{|z|=4} \frac{2z^2 + 1}{(z-1)(z^2+9)} dz & (b) \int_{|z|=3} \tanh z dz \\ (c) \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^4 + 1} dz & \gamma(t) = [-2, 2, 2+i, -2+i, -2] \\ (d) \int_{|z|=6} \frac{\sin^3 z}{2 + \cos z} dz & (e) \int_{|z|=2} \frac{z^4 + 3z^3 - z}{z^{10} + 1} dz \\ (f) \int_{\gamma} \frac{dz}{z(z-3)^4} dz & \gamma(t) = 3 + i + 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi \\ (g) \int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z^3} dz & (h) \int_{|z|=1} \bar{z} dz \end{array}$$

Risp: (a) $4\pi i$. (b) $4\pi i$. (c) $\pi e^{-1/\sqrt{2}} \sin(1/\sqrt{2} + \pi/4)$. (d) $24\pi i$. (e) 0 (non è necessario fare molti calcoli). (f) $-\frac{2\pi i}{81}$. (g) $2\pi i$. (h) $2\pi i$.

- (3) Determinare l'intero n tale che si ha $f(z) \sim \mathcal{O}((z - z_0)^n)$ quando $z \rightarrow z_0$.

$$\begin{array}{llll} (a) (z-3)^4 z^2 & z_0 = 3, 0, 1 & (b) \sin z & z_0 = 0, \pi/2, \pi \\ (c) \cos z & z_0 = 0, \pi/2, \pi & (d) (\sin z)^{15} & z_0 = 0, \pi/2, \pi \\ (e) (e^{z^2} - 1)^3 & z_0 = 0, 1 & (f) \sin(\sin z) & z_0 = 0, \pi/2 \\ (g) \sin(\sin(\sin z)) & z_0 = 0, \pi/2 & (h) \cosh(e^{z^3} - 1) - 1 & z_0 = 0 \\ (i) \log(\sin^2 z) & z_0 = \pi/2 & (j) \log \cosh \log(\sin^2 z) & z_0 = \pi/2 \end{array}$$

Risp: (a) 4, 2, 0. (b) 1, 0, 1. (c) 0, 1, 0. (d) 15, 0, 15. (e) 6, 0. (f) 1, 0. (g) 1, 0. (h) 6. (i) 2. (j) 4.

- (4) Data la funzione

$$f(z) := \frac{e^{1/z}}{1-z},$$

si calcoli $\text{Res}(f, 0)$ in due modi diversi: (a) tramite lo sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$; (b) calcolando il residuo all'infinito e ...

- (5) Determinare le singolarità isolate, la loro natura e, per ciascuna singolarità calcolare il rispettivo residuo.

$$(a) \frac{1 - \cosh z}{z^3} \quad (b) \frac{1}{z(e^z - 1)} \quad (c) \frac{z^2 - 4\pi^2}{z(1 - \cos z)}$$

Risp: (a) $z = 0$, polo 1, $\text{Res}(f, 0) = -1/2$. (b) L'insieme delle singolarità è $S = \{z_k = i2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. $z = 0$, polo 2, $\text{Res}(f, 0) = -1/2$. $z = z_k = i2k\pi$, con $k \neq 0$, polo 1, $\text{Res}(f, 0) = -i/(2k\pi)$. (c) L'insieme delle singolarità è $S = \{z_k = 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. $z = 0$, polo 3, $\text{Res}(f, 0) = 2(1 - \pi^2/3)$. $z = \pm 2\pi$, polo 1, $\text{Res}(f, \pm 2\pi) = 4$. $z = z_k = 2k\pi$ con $|k| > 1$, polo 2, $\text{Res}(f, z_k) = 2(1 + 1/k^2)$.

(6) Trovare tutte le singolarità isolate e determinarne la natura (per i poli trovare l'ordine)

$$(a) \frac{(z+1)z}{\sin^2 z} \quad (b) \frac{(z+1)}{\sin^3(\pi z)} \quad (c) \frac{z(z^2+4)\sin z}{(e^{\pi z}-1)^2} \quad (d) \frac{1}{e^{e^z}-1}$$

Risp: (a) $z=0$ polo ordine 1, $z=k\pi$ con k intero $k \neq 0$ polo ordine 2. (b) $z=-1$ polo ordine 2, $z \in \mathbb{Z}$, $z \neq -1$ polo ordine 3. (c) $z=0$ eliminabile, $z=\pm 2i$ polo ordine 1, $z=\pm 4i, \pm 6i, \pm 8i, \dots$ polo ordine 2. (d) $z=\log(2k\pi)+i\pi(n+1/2)$ con k intero, $k \geq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, polo ordine 1.

(7) Usando il risultato del problema precedente, calcolare

$$(a) \int_{|z-2|=3} \frac{(z+1)z}{\sin^2 z} dz \quad (b) \int_{|z+1/2|=1} \frac{(z+1)}{\sin^3(\pi z)} dz$$

Risp: (a) $4\pi(1+\pi)i$. (b) i .

(8) Calcolare

$$(a) \int_{|z|=2} \frac{dz}{\sinh(2z)} \quad (b) \int_{|z|=2} \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)} dz \quad (c) \int_{|z|=3} \frac{z^3(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)} dz$$

Risp: (a) $-\pi i$. (b) $4\pi i$. (c) $-3\pi i$.

[RS] (9) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z}.$$

(a) Trovare tutte le singolarità isolate di f e determinarne la natura (per i poli trovare l'ordine).

(b) Calcolare $\int_{\gamma} f$ in cui $\gamma(t) := i\pi/2 + 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Risp: (a) $z=0$ polo 3, $z=ik\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, polo 1. (b) $2\pi i \left[\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{6} \right]$.

[RS] (10) Calcolare

$$(a) \int_{|z|=3} \frac{z}{(z-4)(z-2)(z+1)} dz \quad (b) \int_{|z-1|=1} \frac{z^2}{z^4+1} dz$$

Risp: (a) $-\frac{4}{5}\pi i$. (b) $\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$.

[RS] (11) Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{z dz}{(z-2)(z^2+1)} \quad \gamma(t) := 1+i+2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Risp: $\frac{\pi}{5}(1+2i)$.

[RS] (12) Trovare tutte le singolarità isolate di f . Per ciascuna di esse determinarne la natura (per i poli trovare l'ordine) e calcolare il residuo

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 \sin z}.$$

Risp: $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, polo 1, $\text{Res}(f, z_k) = (-1)^n \frac{e^{n\pi}}{n^2 \pi^2}$. $z=0$, polo 3, $\text{Res}(f, 0) = 2/3$.

[RS] (13) Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 dz}{e^{\pi z} + 1} \quad \gamma(t) := 1+2i+2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Risp: $20i$.

13-14/S2 (14) Calcolare

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3(z^2+3z+1)}{z^5+1} dz.$$

Risp: $6\pi i$.