

Tecniche di integrazione

11-12/E2 (1) Calcolare

$$(a) \int_{|z|=3/2} \frac{\cot(\pi z)}{(z - 1/4)^2} dz \quad (b) \int_{|z|=1} \frac{z^2(2z^2 + 3)}{3z^5 + 1} e^{1/z} dz$$

Risp: (a) $i [32 (1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}) - 4\pi^2]$. (b) $\frac{4\pi i}{3}$.

(2) Verificare che

$$\int_{|z|=4} \left(z + \frac{1}{z^2}\right)^3 \cos(1/z) dz = \frac{\pi i}{12}$$

(3) Calcolare

$$\begin{aligned} (a) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \quad (b) \int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} \quad (c) \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1} \\ (d) \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} \quad (e) \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2} \quad (f) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 4x + 13)} \\ (g) \int_{-\infty}^\infty \frac{(x + 3) dx}{(x + i)^2 (x + 3 + 2i)^3} \end{aligned}$$

Risp: (a) $\pi/4$. (b) $-\pi/5$. (c) $\pi/(2\sqrt{2})$. (d) $2\pi/(3\sqrt{3})$. (e) $\pi/200$. (f) $\pi/15$. (g) 0.

(4) Verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{((x - a)^2 + b^2)^2} = \frac{\pi a}{2b^3} \quad a > 0, b > 0.$$

(5) Calcolare

$$\begin{aligned} (a) \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x dx}{x^2 + 4x + 5} \quad (b) \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x dx}{x^2 - 6x + 10} \quad (c) \int_0^\infty \frac{\cos(ax) dx}{(x^2 + 1)^2} \quad (a > 0) \\ (d) \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin(ax)}{x^4 + 4} dx \quad (a > 0) \end{aligned}$$

Risp: (a) $-\frac{\pi}{e} \sin 2$. (c) $\frac{\pi}{4}(1 + a)e^{-a}$. (d) $\frac{\pi}{2}e^{-a} \sin a$.

[TI] (6) Si consideri l'integrale

$$I := \int_0^\infty \frac{x \sin x dx}{x^4 + 1}.$$

(a) Scrivere chiaramente la relazione che lega la quantità I al valore di alcuni residui di un'opportuna funzione complessa

(b) Calcolare I semplificando il risultato il più possibile.

Risp: $\frac{\pi}{2} \sin(1/\sqrt{2})e^{-1/\sqrt{2}}$

13-14/S1 (7) Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

Risp: $\pi \cos(1)/e$.

(8) Verificare che, se $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, si ha

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^k + 1} = \frac{\pi/k}{\sin(\pi/k)}.$$

(9) Verificare che, se $n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} = \frac{\pi(2n-3)!!}{2^n(n-1)!}$$

☆ (10) Siano m e n due interi tali che $0 \leq m < n$. Dimostrare che

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx = \frac{\pi}{2n} \csc\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)$$

Sugg: sfruttando la parità dell'integrando si ottiene

$$I = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx = (\pi i) \sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}(f, z_k)$$

in cui $(z_k)_{k=0}^{n-1}$ sono le soluzioni dell'equazione $z^{2n} + 1 = 0$ che si trovano nel semipiano superiore. A questo punto bisogna avere solo un po' di fiducia (nella forza). A proposito, $\csc(z) := 1/\sin(z)$.

(11) Dato $\vartheta \in [0, 2\pi)$, si consideri la semiretta γ_ϑ , uscente dall'origine ad angolo ϑ

$$\gamma_\vartheta(t) = te^{i\vartheta} \quad t \in [0, \infty).$$

Per ciascuna delle seguenti funzioni f calcolare, al variare di ϑ , $\ell(\vartheta) := \lim_{t \rightarrow +\infty} |f(\gamma_\vartheta(t))|$

$$(a) \exp(iz) \quad (b) \exp(-z^2) \quad (c) \exp(iz^2)$$

Risp: (a) $\ell(0) = \ell(\pi) = 1$; se $\vartheta \in (0, \pi)$, $\ell(\vartheta) = 0$ se $\vartheta \in (\pi, 2\pi)$, $\ell(\vartheta) = +\infty$.

(12) Verificare che, se $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$(a) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\lambda x}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|\lambda|} \quad (b) \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2 - i\lambda x} dx = \sqrt{\pi} e^{-\lambda^2/4}.$$

[(b). Sugg: integrare la funzione $f(z) = e^{-z^2}$ lungo il rettangolo $[-a, a, a + ib, -a + ib, -a]$. Scegliere opportunamente b e fare il limite $a \rightarrow \infty$.]

☆ (13) Verificare che

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

[Sugg: integrare la funzione e^{iz^2} lungo un cammino chiuso che va da 0 a R , poi percorre un ottavo di circonferenza (fino a $\pi/4$) e torna all'origine].]