

Polinomi di Hermite ed autofunzioni dell'oscillatore armonico quantistico

(1) Sapendo che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ (come si dimostra?), dimostrare che per ogni intero positivo n si ha

$$I_{2n} := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n} \quad I_{2n-1} := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n-1} dx = 0$$

in cui $n!!$ è il prodotto di tutti i naturali minori o uguali a n che hanno la stessa parità di n . Es: $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6$, $7!! = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Nel caso pari si ha $(2n)!! = 2^n n!$. (Sugg: scrivere $e^{-x^2} x^{2n} = (e^{-x^2} x) x^{2n-1}$ e ottenere una relazione di ricorrenza integrando per parti).

(2) (Polinomi di Hermite).

Sia $\gamma(x) = e^{-x^2}$ e si consideri lo spazio euclideo $C_2(\mathbb{R}, \gamma(x)dx)$ con prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{\gamma} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} dx.$$

(a) Ortogonalizzare (senza normalizzare) i polinomi: $1, x, x^2, x^3$, utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.

(b) Si definiscano i polinomi di Hermite come

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} D^n (e^{-x^2})$$

e si dimostri che

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

(c) Utilizzando l'identità ottenuta al punto precedente, dimostrare per induzione l'identità

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

che implica quindi la formula di ricorrenza

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Dopo aver calcolato H_0 e H_1 a partire dalla definizione, calcolare con la formula di ricorrenza H_2, H_3, H_4, H_5 . Verificare che H_0, H_1, H_2 e H_3 coincidono, a parte la normalizzazione, con i polinomi ottenuti al punto (a).

(d) Dimostrare che H_n soddisfa l'equazione differenziale:

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

(e) Osservare che

$$e^{-x^2} H_n(x) = -D(e^{-x^2} H_{n-1}(x)) \quad \textcircled{1}$$

e dimostrare che

$$\langle H_n, H_m \rangle_{\gamma} = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}.$$

In particolare quindi $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ è un sistema ortogonale.

(Sugg: sia $I_{n,m} := \langle H_n, H_m \rangle_{\gamma}$. Se $m = 0$ e $n > 0$ (o viceversa), l'ortogonalità segue dalla $\textcircled{1}$. Se m e n sono entrambi positivi si può integrare per parti usando la $\textcircled{1}$ ottenendo una relazione fra $I_{n,m}$ e $I_{n-1,m-1}$. Questa relazione implica $I_{n,m} = 0$ se $n \neq m$, mentre, se $n = m$ si ottiene, iterando, $I_{n,n} = \sqrt{\pi} 2^n n!$).

(f) Osservare che, se γ è un cammino chiuso nel piano complesso che gira una volta in senso antiorario attorno al punto x , grazie alla formula integrale di Cauchy posso scrivere

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz.$$

Dimostrare quindi che la funzione generatrice dei polinomi di Hermite è data da

$$F(t, x) := \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2}.$$

(Sugg: scambiare la serie con l'integrale ed usare nuovamente la formula integrale di Cauchy per calcolare l'integrale risultante).

(g) Le *funzioni di Hermite* sono definite come

$$\psi_n(x) := A_n e^{-x^2/2} H_n(x) \quad \text{in cui } A_n = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2}.$$

Dimostrare che $(\psi_n)_{n=0}^\infty$ è un sistema ortonormale nello spazio euclideo $C_2(\mathbb{R})$ (o nel suo completamento $L_2(\mathbb{R})$). Dimostrare che ψ_n soddisfa l'*equazione di Schrödinger* dell'oscillatore armonico, data da (accatagliati a parte)

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} \right] \psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x). \quad \text{con } \lambda_n = n + \frac{1}{2}.$$

Convergenza in L_2 e convergenza puntuale

★ (1) Trovare una successione di funzioni $(f_n)_{n=0}^\infty$ nello spazio di Hilbert $L_2[0, 1]$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = 0,$$

ma $f_n(x)$ non converge puntualmente a zero per alcun $x \in [0, 1]$. (Questo dimostra in modo eclatante che la convergenza rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$ non implica la convergenza puntuale).