Serie e trasformate di Fourier/2

(1) Utilizzando un opportuno sviluppo in serie di Fourier, dimostrare che $\zeta(4) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, in cui ζ è la funzione zeta di Riemann.

(2) Sia $f \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e sia $\hat{f} := \mathcal{F}[f]$. Dimostrare le seguenti identità, in cui $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(-x)](\lambda) &= \hat{f}(-\lambda) \\
\mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) &= e^{-i\lambda a}\,\hat{f}(\lambda) \\
\mathcal{F}[f(x)\,e^{iax}](\lambda) &= \hat{f}(\lambda - a) \\
\mathcal{F}[f(x)\,\cos(ax)](\lambda) &= \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\lambda+a) + \hat{f}(\lambda-a)\right] \\
\mathcal{F}[f(x)\,\sin(ax)](\lambda) &= \frac{1}{2i}\left[\hat{f}(\lambda-a) - \hat{f}(\lambda+a)\right] \\
\mathcal{F}[f(a\,x)](\lambda) &= \frac{1}{|a|}\,\hat{f}(\lambda/a) && a \neq 0 \\
\mathcal{F}[f(a\,(x-b))](\lambda) &= \frac{1}{|a|}\,e^{-i\lambda b}\,\hat{f}(\lambda/a) && a \neq 0 \\
\mathcal{F}[f(a\,x-b)](\lambda) &= \frac{1}{|a|}\,e^{-i\lambda(b/a)}\,\hat{f}(\lambda/a) && a \neq 0
\end{aligned}$$

(3) Verificare le seguenti identità (H è la funzione a gradino di Heaviside), valide per $a > 0$

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}(x)](\lambda) = \mathrm{sinc}(\lambda/(2\pi)) \qquad \mathcal{F}[\mathrm{tri}(x)](\lambda) = \mathrm{sinc}^2(\lambda/(2\pi))$$

$$\mathcal{F}[I_{[-a,a]}](\lambda) = \frac{2\sin(\lambda a)}{\lambda} \qquad \mathcal{F}[e^{-ax}H(x)](\lambda) = \frac{1}{a+i\lambda}$$

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\lambda) = \frac{2a}{a^2+\lambda^2}$$

(4) Trovare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni (quando è possibile usare opportune trasformazioni per ricondursi al caso di una funzione la cui trasformata di Fourier è nota):

$$(a)\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \le 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \qquad (b)\quad f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } |x| \le \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \end{cases}$$

$$(c)\quad f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (d)\quad f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } |x| \le \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \end{cases}$$

$$(e)\quad f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{se } |x| \le \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \end{cases} \qquad (f)\quad f(x) = e^{-3x}H(2x+5)$$

$$(g)\quad f(x) = \begin{cases} 2(x-3) & \text{se } x \in [3,5] \\ 2(7-x) & \text{se } x \in [5,7] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Risp: (a) $2\sin(\lambda)/\lambda$. (c) $-\frac{2}{\lambda^2-1}\cos(\lambda\pi/2)$. (f) $\frac{e^{\frac{5}{2}(3+i\lambda)}}{3+i\lambda}$. (g) $8e^{-i5\lambda}\sin^2(\lambda)/\lambda^2$.

(5) Trovare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$(a)\quad f(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad (b)\quad f(x) = \frac{1}{x^4+1}.$$

(Suggerimento. Utilizzare il teorema dei residui chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano inferiore della variabile complessa $z = x + iy$ per $\lambda > 0$, e nel semipiano superiore per $\lambda < 0$).

Risp: (a) $\pi\,e^{-|\lambda|}$. (b) $\pi e^{-|\lambda|/\sqrt{2}}\,\sin\left[\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right]$.

(6) Sia $I_{[-a,a]}$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[-a,a]$ con $a > 0$ e sia $f(x) := \cos x\, I_{[-a,a]}(x)$.

(a) Calcolare la trasformata di Fourier $g = \mathcal{F}[f]$ di f (utilizzare una delle proprietà dimostrate in precedenza).

Volta la pagina ☞

(b) Determinare i valori del parametro a per i quali $g(\lambda)$ tende a zero, quando $\lambda \to \infty$, *più velocemente* di $1/\lambda$ (in realtà come $1/\lambda^2$).

(c) Spiegare il perché del punto precedente

(7) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione f lineare a tratti, il cui grafico si ottiene collegando con dei segmenti i punti:

$$(-\infty, 0),\ (0,0),\ (1,3),\ (2,5),\ (3,5),\ (4,0),\ (+\infty, 0)\,.$$

(Sugg: scrivere f in termini di una combinazione di "funzioni triangolo" tri()).

(8) Riconducendosi, se possibile, a casi noti, verificare che

$$(a)\ \ \mathcal{F}\left[x^2 e^{-x^2}\right](\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(2-\lambda^2)\, e^{-\lambda^2/4}$$

$$(b)\ \ \mathcal{F}\left[\frac{1}{(1+x^2)^2}\right](\lambda) = \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|}\,(|\lambda|+1)$$

$$(c)\ \ \mathcal{F}\left[e^{-|bx+c|}\right](\lambda) = \frac{2|b|}{\lambda^2+b^2}\, e^{ic\lambda/b} \qquad\qquad b, c \in \mathbb{R},\ b \neq 0$$

12-13/S1 (9) Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\ \ x^2\, e^{-|x|} \qquad\qquad (b)\ \ \frac{1}{(x+i)^3}$$

Risp: (a) $\frac{4(1-3\lambda^2)}{(\lambda^2+1)^3}$. (b) $i\pi\lambda^2\, H(\lambda)\, e^{-\lambda}$.

12-13/S2 (10) Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti (H è la funzione a gradino di Heaviside)

$$(a)\ \ xe^{-3x^2+5ibx} \qquad\qquad (b)\ \ e^{3x-6} H(2-x)$$

Risp: (a) $-\frac{i}{6}\sqrt{\frac{\pi}{3}}(\lambda-5b)\exp\left(-\frac{(\lambda-5b)^2}{12}\right)$. (b) $\frac{e^{-2i\lambda}}{3-i\lambda}$

12-13/S3 (11) Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\ \ \frac{1}{(1+4x^2)^2} \qquad\qquad (b)\ \ x^3\, e^{-x^2}\,.$$

Risp: (a) $\frac{\pi}{8} e^{-|\lambda|/2}(|\lambda|+2)$. (b) $\frac{i}{8}\sqrt{\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\lambda\left(\lambda^2-6\right)$.

[TF] (12) Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Cosa si può affermare, nei casi seguenti, sul grado di derivabilità di $\hat{f}$ senza doverla calcolare?

$$(a)\ \ f(x) = x^7 e^{-\sqrt{|x|}} \qquad\qquad (b)\ \ f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} \qquad\qquad (c)\ \ f(x) = \frac{1}{1+|x|^3}$$

[TF] (13) Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\hat{f}$ è di classe C^p e che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^q \hat{f}(\lambda) = 0$, in cui p e q valgono ...

$$(a)\ \ f(x) = \frac{1}{1+x^6} \qquad\qquad (b)\ \ f(x) = \begin{cases} \sin^2(x) & \text{se } x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

[TF] (14) Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = x^2\, e^{-|x|}$. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p \hat{f}(\lambda) = 0$ e che $\hat{f}$ è di classe C^q in cui p e q valgono ...

[TF] (15) Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p \hat{f}(\lambda) = 0$ e che $\hat{f}$ è di classe C^q in cui p e q valgono ...

$$(a)\ \ f(x) = \frac{x-3}{1+x^4} \qquad\qquad (b)\ \ f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(16) Sia $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni nello spazio $L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ che converge ad $f \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. Sia $\hat{f}_n := \mathcal{F}[f_n]$ e $\hat{f} := \mathcal{F}[f]$. Dimostrare che $\hat{f}_n$ converge uniformemente a $\hat{f}$.