

Numeri Complessi

(1) Calcolare:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \operatorname{Re} \frac{1+2i}{2-i} & (b) \quad & \operatorname{Im} \frac{3-2i}{4+i} & (c) \quad & \left| \frac{3-2i}{4+i} \right| & (d) \quad & \left| \frac{(3-2i)^5 (2+i)^3}{(5-i)^8} \right| \\
 (e) \quad & \operatorname{Re}(i^{9876}) & (f) \quad & \operatorname{Re} \left[\left(\frac{23-15i}{14+4i} \right)^{\operatorname{Im}(z+\bar{z})} \right] & (g) \quad & |2e^{3i}| & (h) \quad & |2e^3| \\
 (i) \quad & \operatorname{Re}(e^{2i}) & (j) \quad & \operatorname{Re}(e^{-i\pi/4}) & (k) \quad & \operatorname{Re}(e^{-\pi/4}) & (l) \quad & |1-i\sqrt{3}| \\
 (m) \quad & |1-\sqrt{3}|
 \end{aligned}$$

Risp: (a) 0. (b) $-11/17$. (c) $\sqrt{13/17}$. (d) $\frac{5\sqrt{5}}{208\sqrt{13}}$. (f) 1. (g) 2. (h) $2e^3$. (j) $1/\sqrt{2}$. (k) $e^{-\pi/4}$. (l) 2. (m) $\sqrt{3}-1$.

[OP] (2) Calcolare Arg e $\arg_+$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & 3 & (b) \quad & -5 & (c) \quad & 2i & (d) \quad & -4i \\
 (e) \quad & 1+i & (f) \quad & 3-3i & (g) \quad & -1-i\sqrt{3} & (h) \quad & 2\sqrt{3}-2i \\
 (i) \quad & -3+i\sqrt{3} & (j) \quad & -3-i\sqrt{3} & (k) \quad & \sqrt{3}-i & (l) \quad & \sqrt{3}-3i \\
 (m) \quad & 2-3i & (n) \quad & -2-4i & (o) \quad & (-1+i\sqrt{3})^5 & (p) \quad & (2\sqrt{3}-2i)^5 \\
 (q) \quad & e^{i3\pi/2} & (r) \quad & e^{3\pi/2} & (s) \quad & e^{6i} & (t) \quad & i-2
 \end{aligned}$$

Risp: (a) 0, 0. (b) π , π . (d) $-\pi/2$, $3\pi/2$. (g) $-2\pi/3$, $4\pi/3$. (i) $5\pi/6$, $5\pi/6$. (j) $-5\pi/6$, $7\pi/6$. (m) $-\arctan(3/2)$, $2\pi - \arctan(3/2)$. (n) $\arctan 2 - \pi$, $\arctan 2 + \pi$. (o) $-2\pi/3$, $4\pi/3$. (q) $-\pi/2$, $3\pi/2$. (r) 0, 0. (s) $6-2\pi$, 6. (t) $\pi - \arctan(1/2)$, $\pi - \arctan(1/2)$.

(3) Calcolare (trovare il valore numerico!) parte reale e parte immaginaria di

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & 5e^{i\pi/3} & (b) \quad & 2ie^{i13\pi/4} & (c) \quad & 5e^{-2i\pi/3} & (d) \quad & (1+i)^{20} \\
 (e) \quad & (1+i)^5(\sqrt{3}+i)^3 & (f) \quad & (1-\sqrt{3}i)^{100} & (g) \quad & (1+2i)^5
 \end{aligned}$$

Risp: (b) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. (d) -2^{10} . (e) $32-32i$. (f) $2^{99}(-1+i\sqrt{3})$. (g) $41-38i$.

(4) Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Verificare che

$$(a) \quad \operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{ix}+1} \right) = \frac{1}{2} \quad (b) \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1}{e^{ix}+1} \right) = -\frac{1}{2} \tan(x/2).$$

(5) Dimostrare per induzione che, per ogni intero $n \geq 2$, vale $|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$.

(6) Descrivere a parole e graficamente le regioni seguenti

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & |z-i+5| = 3 & (b) \quad & |3z+i| \geq 1 & (c) \quad & \operatorname{Re}(\bar{z}+2i) \leq 5 \\
 (d) \quad & \operatorname{Re}(\bar{z}) \leq \operatorname{Im}(z) & (e) \quad & |z-a| - |z+a| = 2c \text{ con } a, c \text{ reali positivi, } c < a \\
 (f) \quad & |z-1| - |z+i| = 0 & (g) \quad & |z-1| + |z+i| = 0 & (h) \quad & \left| \frac{z}{z+1} \right| \leq 1
 \end{aligned}$$

(7) Dimostrare che, se $|z| = 10$, allora

$$(a) \quad 98 \leq |z^2 + 2i| \leq 102 \quad (b) \quad \left| \frac{z^2 + 20i}{z^3 - 5iz^2 + 20} \right| \leq \frac{1}{4}$$

☆ (8) Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Sotto quale condizione l'equazione

$$az + b\bar{z} + c = 0$$

ha una e una sola soluzione? Scrivere la soluzione. (Sugg: prendere il complesso coniugato dell'equazione ed eliminare $\bar{z}$).

(9) Esprimere le seguenti quantità in funzione di $\sin \vartheta$, $\cos \vartheta$

$$(a) \cos(3\vartheta) \quad (b) \sin(4\vartheta) \quad (c) \cos(5\vartheta)$$

$$\text{Risp: } (c) \cos^5 \vartheta - 10 \cos^3 \vartheta \sin^2 \vartheta + 5 \cos \vartheta \sin^4 \vartheta.$$

(10) Trovare $w, z \in \mathbb{C}$ tali che

$$(a) \operatorname{Arg}(wz) \neq \operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z \quad (b) \arg_+(wz) \neq \arg_+ w + \arg_+ z$$

☆ (11) Dimostrare che (se non erro), per $\vartheta \neq 0$, vale la seguente identità (Sugg: il membro a sinistra si può scrivere come $\operatorname{Re} \sum_{k=0}^n (e^{i\vartheta})^k$ ed è dunque una somma geometrica finita per la quale esiste una formula esplicita. A questo punto servono un po' di formule trigonometriche ed una certa dose di pazienza)

$$1 + \cos \vartheta + \cos 2\vartheta + \dots + \cos n\vartheta = \frac{\sin((n+1)\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)} \cos(n\vartheta/2).$$

(12) Trovare e disegnare nel piano complesso (tutte) le soluzioni delle equazioni:

$$\begin{array}{llll} (a) z^2 = 1 & (b) z^3 = i & (c) z^5 = 1 + i & (d) z^4 = 1 - i\sqrt{3} \\ (e) 2z^7 + 3iz = 0 & (f) z^6 + 2z^3 + 1 = 0 & (g) z^2 - 2i = 4 & \end{array}$$

$$\text{Risp: } (d) z = \sqrt[4]{2} \exp[-i(\pi/12 + k\pi/2)], k = 0, 1, 2, 3.$$

(e) $z = 0$, $z = \sqrt[6]{3/2} \exp[-i(\pi/12 + k\pi/3)], k = 0, 1, \dots, 5$. (g) $z_1 = \sqrt{2 + \sqrt{5}} + i(\sqrt{2 + \sqrt{5}})^{-1}$, $z_2 = -z_1$. Per ottenere questi valori numerici di z_1 e z_2 si può considerare la (g) come un sistema di 2 equazioni in 2 incognite, prendendo la parte reale e la parte immaginaria. Alternativamente, con un po' di trigonometria, si può ottenere il valore di $\cos(\vartheta/2)$ in cui $\vartheta = \arctan(1/2)$.

(13) Calcolare il valore numerico di $\cos(3 \arctan 2)$. (Sugg: si esprima $\cos(3\vartheta)$ in funzione di $\dots$).

(14) Supponendo che $z^n = 1$ calcolare il valore della seguente somma (considerare separatamente il caso $k = 0$).

$$1 + z^k + z^{2k} + \dots + z^{(n-1)k} \quad k \text{ intero positivo}$$

(15) Descrivere a parole e graficamente le regioni seguenti

$$\begin{array}{lll} (a) |\pi/2 - \arg z| \leq \pi/4 & (b) 1 \leq |z + i| \leq 2 & (c) 0 \leq \arg z \leq \pi/2 \\ (d) \pi/4 \leq \arg(z + i) \leq \pi/2 & (e) \operatorname{Re} z^2 \geq \operatorname{Im} z^2 & \end{array}$$

Risp: (e) Risolvere l'uguaglianza $\operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Im} z^2$ in coordinate cartesiane e usare $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$. Si trova $\{\arg z \in [-3\pi/8, \pi/8] \cup [5\pi/8, 9\pi/8]\}$.

(16) Scomporre $z^4 + 4$ come prodotto di due polinomi quadratici a coefficienti reali. (Sugg: trovare le soluzioni (complesse) dell'equazione $z^4 + 4 = 0$).

Cammini

(17) Descrivere a parole i seguenti cammini e disegnarne la traccia sul piano complesso.

$$\begin{array}{ll} (a) \gamma(t) = t, \quad t \in [0, 1] & (b) \gamma(t) = it, \quad t \in [0, 1] \\ (c) \gamma(t) = 1 - it, \quad t \in [0, 1] & (d) \gamma(t) = t + it, \quad t \in [0, 1] \\ (e) \gamma(t) = t^2 - it^2, \quad t \in [0, 2] & (f) \gamma(t) = t + it^2, \quad t \in [0, 1] \\ (g) \gamma(t) = -t^2 - it, \quad t \in [0, 1] & (h) \gamma(t) = t + i \sin t, \quad t \in [0, \pi/2] \\ (i) \gamma(t) = e^t + 2ie^t, \quad t \in [0, \infty) & (j) \gamma(t) = e^t + 2ie^t, \quad t \in (-\infty, 0] \\ (k) \gamma(t) = \log t + 2i \log t, \quad t \in (0, \infty) & (l) \gamma(t) = \log t + 2i \log t, \quad t \in (0, 1] \\ (m) \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi] & (n) \gamma(t) = te^i, \quad t \in [0, 2\pi] \\ (o) \gamma(t) = e^{i \sin t}, \quad t \in [0, \pi/2] & (p) \gamma(t) = te^{it}, \quad t \in [0, \infty) \end{array}$$

Risp: (a) segmento $[0, 1]$. (b) segmento $[0, i]$. (c) segmento $[1, 1 - i]$. (e) segmento $[0, 4 - 4i]$. (f) arco di parabola $y = x^2$ con $x \in [0, 1]$. (i) semiretta uscente dal punto $(1, 2)$ e angolo $\arctan 2$. (k) retta passante per l'origine e angolo $\arctan 2$. (n) segmento di lunghezza 2π con un estremo in 0 che forma un angolo 1 con l'asse x .