Condizioni di Cauchy–Riemann, funzioni armoniche

(1) Determinare i valori di $z = x + iy \in \mathbb{C}$ in cui esiste $f'(z)$

$$(a)\quad f(z) = z^2 \operatorname{Re} z \qquad (b)\quad f(z) = x^2 + iy^2 \qquad (c)\quad f(z) = z - \bar{z}$$

Risp: (a) $z = 0$. (b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$. (c) Mai.

(2) Dimostrare che $f(z) = \bar{z} \exp[\cosh(z^2)]$ non è analitica.

(3) Trovare l'armonica coniugata di

$$(a)\quad u(x, y) = x^3 - 3x\,y^2 \qquad (b)\quad u(x, y) = e^{-x}\,[(1 + x)\cos y + y \sin y]\ .$$

(4) Trovare l'armonica coniugata di u

$$\begin{aligned} &(a)\quad u(x, y) := \frac{1 + x}{(1 + x)^2 + y^2} && x \in \mathbb{R},\ y > 0 \\ &(b)\quad u(x, y) := e^{-x}\,(x \sin y - y \cos y) && (x, y) \in \mathbb{R}^2\ . \end{aligned}$$

(5) Trovare un'armonica coniugata di $u(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$.

(6) Trovare un polinomio armonico $P(x, y)$ che contenga il termine x^4.
Risp: $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

(7) Trovare tutti i polinomi armonici $P(x, y)$ tali che $P(x, y)^2$ è ancora armonico (sono pochi).