

Sviluppi in serie

- (1) Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z - z_0)^n)$ nel limite $z \rightarrow z_0$

$$\begin{array}{ll} (a) \quad z_0 = 0, (\sin z)^3 & (b) \quad z_0 = 0, (\cosh z^2 - 1)^2 \\ (c) \quad z_0 = 0, \log(1 + z^3) & (d) \quad z_0 = \pi, \sin(z) \\ (e) \quad z_0 = 0, \sin(\pi \exp(z^3)) & (f) \quad z_0 = 1, (\log z)^2 \\ (g) \quad z_0 = 0, \log(\cos z) & (h) \quad z_0 = \pi, \log(1 + \sin^2(z)) \\ (i) \quad z_0 = 0, \sin(e^{z^2}) & (j) \quad z_0 = 0, \sin(\pi e^{z^2}) \end{array}$$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z^3)$. (b) $\mathcal{O}(z^8)$. (c) $\mathcal{O}(z^3)$. (d) $\mathcal{O}(z - \pi)$. (e) $\mathcal{O}(z^3)$. (f) $\mathcal{O}(z - 1)^2$. (g) $\mathcal{O}(z^2)$. (h) $\mathcal{O}((z - \pi)^2)$. (i) $\mathcal{O}(1)$. (j) $\mathcal{O}(z^2)$.

- (2) Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^4

$$\begin{array}{ll} (a) \quad \frac{z \cos z}{1 + \log(1 + z^2)} & (b) \quad \frac{e^{z^2} - 1}{3 + \cosh z} \\ (c) \quad \frac{\sin^3 z}{1 - \cosh z} & (d) \quad \tan z \end{array}$$

Risp: (a) $z - 3z^3/2 + \mathcal{O}(z^5)$. (b) $z^2/4 + 3z^4/32 + \mathcal{O}(z^5)$. (c) $-2z + 7z^3/6 + \mathcal{O}(z^5)$. (d) $z + z^3/3 + \mathcal{O}(z^5)$.

- (3) Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z - z_0)^n)$ nel limite $z \rightarrow z_0$

$$\begin{array}{ll} (a) \quad z_0 = 0, \cos[\log[1 + (\sin z)^2]] - 1 & (b) \quad z_0 = 0, \exp(\sin^2 z - z^2) - 1 \\ (c) \quad z_0 = \pi/2, \cos \log \sin z - 1 & (d) \quad z_0 = 0, \exp[\sin(z^2) - z^2] - 1 \\ (e) \quad z_0 = 0, \tan[\log(1 + z) - z] & (f) \quad z_0 = 4\pi i, \cos[\sin(e^z - 1)] - 1 \end{array}$$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z^4)$. (b) $\mathcal{O}(z^4)$. (c) $\mathcal{O}((z - \pi/2)^4)$. (d) $\mathcal{O}(z^6)$

- (4) Calcolare lo sviluppo di Taylor (nell'origine) fino all'ordine z^3

$$(a) \quad \frac{2 \cos z}{2 + \sin z} \quad (b) \quad \frac{3 + z^2}{z + e^z} \quad (c) \quad \frac{\sin z}{e^z - 1} \quad (d) \quad \frac{z^2 \cos z}{z^2 + \log(z + 1)}$$

Risp: (a) $1 - z/2 - z^2/4 + 5z^3/24 + \mathcal{O}(z^4)$. (b) $3 - 6z + 23z^2/2 - 41z^3/2 + \mathcal{O}(z^4)$. (c) $1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \frac{z^3}{12} + \mathcal{O}(z^4)$. (d) $z - \frac{z^2}{2} - \frac{7z^3}{12} + \mathcal{O}(z^4)$.

- (5) Scrivere le seguenti funzioni come serie di potenze centrate in 0

$$(a) \quad \frac{z}{(a - z)^3} \quad (b) \quad \frac{1}{(1 + z^2)^2}$$

[Sugg: usare l'identità: $\frac{1}{(a-z)^n} = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} \frac{1}{a-z}$ per ricondursi alla serie geometrica. In (b) conviene fare un cambio di variabile].

Risp: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{z^n}{2a^{n+2}}$. (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n}$.

- ☆ (6) (Bernoulli numbers, convenzione $B_1 = -1/2$). Siano date le funzioni

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \quad g(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

- (a) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze di f con centro in nell'origine, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e determinare il raggio di convergenza R_f della serie ottenuta.

- (b) Sia $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ lo sviluppo in serie di g nell'origine. Determinare il raggio di convergenza R_g di questa serie.
- (c) I *numeri di Bernoulli* B_n sono definiti come $B_n := n! b_n$, in modo tale da poter scrivere

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad |z| < R_g.$$

Dimostrare che $B_0 = 1$ e che, per ogni $n \geq 1$, vale

$$B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \cdots + \binom{n+1}{n} B_n = 0.$$

Dopo aver calcolato B_0 , si usi la formula precedente per calcolare $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$. Controllare il risultato su www.wikipedia.org alla voce ...

Varie

11-12/E1 (7) Data la funzione $f(z) = \log(1 + iz^2)$ (ramo principale):

- (a) determinare il dominio di analiticità di f e disegnarlo sul piano complesso
- (b) calcolare $a_+ := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(1 + i + \varepsilon)$ e $a_- := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(1 + i - \varepsilon)$.

(8) Trovare l'armonica coniugata alla funzione

$$u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos(2xy).$$

(Sugg: provate ad indovinare quale può essere una funzione analitica f tale che $u = \operatorname{Re} f$)