

Integrali

- (1) Scrivere esplicitamente in termini di una parametrizzazione di γ l'integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$, nel caso in cui γ è dato da

- (a) il triangolo $[0, 1, i, 0]$ percorso in senso antiorario
 (b) la circonferenza di centro i e raggio R percorsa 2 volte in senso orario
 (c) il quadrato di centro in 0 e lato uguale a 2, percorso in senso antiorario

Risp: (a) $\int_0^1 f(t) dt + (i-1) \int_0^1 f((1-t) + it) dt - i \int_0^1 f(it) dt.$

- (2) Se γ è la spezzata $[0, 1, 2+i, 5+i, 7+3i, \log i, i^i, 2+i, e^{e^{2-i}}, i]$. Calcolare (senza fare troppi calcoli)

$$\int_{\gamma} \cos z dz.$$

- (3) Calcolare, usando la definizione,

$$(a) \int_{|z|=1} \bar{z} dz \quad (b) \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \quad \gamma = [1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i].$$

Risp: (b) $2\pi i$.

- (4) Dimostrare che, se γ è il quadrato $[1, i, -1, -i, 1]$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4} \right| \leq 16\sqrt{2}$$

(Sugg: usare la proprietà degli integrali che dice che il modulo dell'integrale è ...)

Sviluppi, CR

- 10-11/S1 (5) Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calcolare (usare il ramo principale del log)

$$(a) \operatorname{Im}(z^8) \quad (b) \log(z^8) \quad (c) |i^z|$$

Risp: (a) $2^7\sqrt{3}$. (b) $8\log 2 + i2\pi/3$. (c) $e^{-\sqrt{3}\pi/2}$.

- (6) Trovare l'armonica coniugata alla funzione

$$u(x, y) := e^{-y}(x \cos x - y \sin x) \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- (7) Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z - z_0)^n)$ nel limite $z \rightarrow z_0$

$$\begin{array}{ll} (a) z_0 = 0, \tan \tan \tan z & (b) z_0 = \pi/2, \cos \cos \cos z \\ (c) z_0 = 0, \cos[\log(1+z) - \sin z] - 1 & (d) z_0 = 0, \exp \sin z - 1 \\ (e) z_0 = 0, \cos[\log(1+z) + \sin z] - 1 & (f) z_0 = 0, \log \cos(z^2) \end{array}$$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z)$. (b) $\mathcal{O}(1)$. (c) $\mathcal{O}(z^4)$. (d) $\mathcal{O}(z)$. (e) $\mathcal{O}(z^2)$. (f) $\mathcal{O}(z^4)$.

- (8) Verificare il seguente sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^3

$$\frac{ze^z}{\cosh z} = z + z^2 + \underline{\mathcal{O}}(z^4).$$

- (9) Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^4

$$(a) \frac{z + \sin^2 z}{\cos z} \quad (b) \frac{\sin(z^2) e^z}{2 + \sin z}$$

Risp: (a) $z + z^2 + z^3/2 + z^4/6 + \underline{\mathcal{O}}(z^5)$. (b) $z^2/2 + z^3/4 + z^4/8 + \underline{\mathcal{O}}(z^5)$.

- (10) Sia G una regione in $\mathbb{C}$ e sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Dimostrare che se $|f|$ è costante allora f è costante. (Sugg: porre $f = u + iv$ ed usare ...).