

Integrali 2

10-11/E1 (1) Sia X l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^i = 1 + i\sqrt{3}$ (usare il ramo principale per definire la potenza).

(a) Determinare X .

(b) Determinare i punti di accumulazione di X in \mathbb{C} (se esistono).

(c) Quante di queste soluzioni appartengono all'anello $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 100\}$?

Risp: (a) $X = \{z_k : k \in \mathbb{Z}\}$ in cui $z_k := \exp[\pi/3 + 2k\pi - i \log 2]$. (c) 1.

(2) Sia p un polinomio di grado n le cui radici si trovano tutte in $B_R(0)$ con $R > 0$. Dimostrare che

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n.$$

(Sugg: scrivere p in forma fattorizzata rispetto alle radici. Provate con un esempio, tipo $p(z) = (z-1)^4(z+i)^7$, per capire cosa succede).

10-11/S2 (3) Sia f una funzione analitica sul primo quadrante $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \leq \operatorname{Re} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 15 + 10i$?

(4) Sia f una funzione analitica sulla semistriscia $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} z < 22, \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \leq \operatorname{Im} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 15 + 10i$?

(5) Calcolare il raggio di convergenza delle serie di Taylor centrata in 0 (sugg: non è necessario calcolare lo sviluppo in serie)

$$(a) \frac{\cosh(e^{z^5})}{1+z+z^2} \quad (b) \tanh z \quad (c) \frac{e^{z^2}}{1+\sin(2z^3)}$$

Risp: (a) 1. (b) $\pi/2$. (c) $\sqrt[3]{\pi/4}$.

12-13/E1 (6) Si considerino gli sviluppi in serie di Taylor della funzione $f(z) = \tan(z^2)$ con centro rispettivamente in 0 e i .

$$(a) \tan(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (b) \tan(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-i)^n.$$

Determinare i raggi di convergenza R_a ed R_b delle serie (a) e (b).

Risp: $R_a = \sqrt{\pi/2}$, $R_b = \sqrt{\pi/2} - 1$.

☆ (7) Sia $u : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione armonica tale che $u(z) \geq 3$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dimostrare che u è costante. (Sugg: sia v l'armonica coniugata di u e sia $f := u + iv$. Si consideri la funzione $g = \exp(-f)$. Quali proprietà ha g ?)

(8) Trovare gli zeri con relative molteplicità delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{lll} (a) z^3(z+3)^5(z^2+1)^4 & (b) z^7+3 & (c) (z^7+3)^3 \\ (d) e^{2z}+i & (e) 2\sin(z/2)-1 & (f) \sin(z/2)-1 \\ (g) (\sin(z/2)-1)^3 & (h) \sin^2(z)-1 & (i) \cosh z \\ (j) \sin(z^2) & (k) e^{\pi z^2}-1 & \end{array}$$

Risp: (a) 0 molt. 3. -3 molt. 5. $\pm i$ molt. 4. (b) $\sqrt[7]{3} \exp[i(\pi/7 + 2k\pi/7)]$, $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$, molt. 1. (g) $\pi(1+4k)$, $k \in \mathbb{Z}$, molt. 6. (h) $\pi(1/2+k)$, $k \in \mathbb{Z}$, molt. 2. (j) 0 molt. 2. $\pm\sqrt{k}\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$, molt. 1. $\pm i\sqrt{k}\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$, molt. 1.