Residui

(1) Determinare le singolarità isolate, la loro natura e, per ciascuna singolarità calcolare il rispettivo residuo.

$$(a)\ \frac{z^2+3}{z(z+2)(z-1)^2} \qquad (b)\ \left(\frac{z}{2z+1}\right)^3 \qquad (c)\ \tanh z \qquad (d)\ \frac{e^z}{z^2+\pi^2}$$
$$(e)\ \frac{\log z}{(1+z^2)^2} \qquad (f)\ (1+z)^4\exp(1/z^2) \qquad (g)\ \frac{z^2+\pi^2}{e^z+1}$$

Risp: (a) $z=0$, polo 1, $\mathrm{Res}(f,0)=3/2$. $z=-2$, polo 1, $\mathrm{Res}(f,-2)=-7/18$. $z=1$, polo 2, $\mathrm{Res}(f,1)=-10/9$. (b) $z=-1/2$, polo 3, $\mathrm{Res}(f,-1/2)=-3/16$. (c) $z_k=i(\pi/2+k\pi)$ con $k\in\mathbb{Z}$. Sono tutti poli ord. 1, $\mathrm{Res}(f,z_k)=1$. (d) $z=i\pi$, polo 1, $\mathrm{Res}(f,i\pi)=i/(2\pi)$. $z=-i\pi$, polo 1, $\mathrm{Res}(f,-i\pi)=-i/(2\pi)$. (e) $z=i$, polo 2, $\mathrm{Res}(f,i)=(\pi+2i)/8$. $z=-i$, polo 2, $\mathrm{Res}(f,-i)=(\pi-2i)/8$. (f) $z=0$, essenziale, $\mathrm{Res}(f,0)=6$. (g) $z_k=i\pi(2k+1)$ con $k\in\mathbb{Z}$. Se $k=0$ o $k=-1$ la singolarità è eliminabile (quindi il residuo è nullo). Se $k\notin\{0,-1\}$ allora z_k è un polo di ordine 1 e $\mathrm{Res}(f,z_k)=4\pi^2k(k+1)$.

(2) Calcolare

$$(a)\ \int_{|z|=4}\frac{2z^2+1}{(z-1)(z^2+9)}\,dz \qquad (b)\ \int_{|z|=3}\tanh z\,dz$$
$$(c)\ \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^4+1}\,dz \qquad \gamma(t)=[-2,\,2,\,2+i,\,-2+i,\,-2]$$
$$(d)\ \int_{|z|=6}\frac{\sin^3 z}{2+\cos z}\,dz \qquad (e)\ \int_{|z|=2}\frac{z^4+3z^3-z}{z^{10}+1}\,dz$$
$$(f)\ \int_\gamma \frac{dz}{z\,(z-3)^4}\,dz \qquad \gamma(t)=3+i+2e^{it},\ 0\le t\le 2\pi$$
$$(g)\ \int_{|z|=2}\frac{z^3\,e^{1/z}}{1+z^3}\,dz \qquad (h)\ \int_{|z|=1}\overline{z}\,dz$$

Risp: (a) $4\pi i$. (b) $4\pi i$. (c) $\pi e^{-1/\sqrt{2}}\sin(1/\sqrt{2}+\pi/4)$. (d) $24\pi i$. (e) 0 (non è necessario fare molti calcoli). (f) $-\frac{2\pi i}{81}$. (g) $2\pi i$. (h) $2\pi i$.

(3) Determinare l'intero n tale che si ha $f(z)\sim\mathcal{O}((z-z_0)^n)$ quando $z\to z_0$.

(a)	$(z-3)^4z^2$	$z_0=3,\,0,\,1$	(b)	$\sin z$	$z_0=0,\,\pi/2,\,\pi$
(c)	$\cos z$	$z_0=0,\,\pi/2,\,\pi$	(d)	$(\sin z)^{15}$	$z_0=0,\,\pi/2,\,\pi$
(e)	$(e^{z^2}-1)^3$	$z_0=0,\,1$	(f)	$\sin(\sin z)$	$z_0=0,\,\pi/2$
(g)	$\sin(\sin(\sin z))$	$z_0=0,\,\pi/2$	(h)	$\cosh(e^{z^3}-1)-1$	$z_0=0$
(i)	$\log(\sin^2 z)$	$z_0=\pi/2$	(j)	$\log\cosh\log(\sin^2 z)$	$z_0=\pi/2$

Risp: (a) $4,2,0$. (b) $1,0,1$. (c) $0,1,0$. (d) $15,0,15$. (e) $6,0$. (f) $1,0$. (g) $1,0$. (h) 6. (i) 2. (j) 4.

(4) Data la funzione

$$f(z):=\frac{e^{1/z}}{1-z},$$

si calcoli $\mathrm{Res}(f,0)$ in due modi diversi: (a) tramite lo sviluppo in serie di Laurent in $z=0$; (b) calcolando il residuo all'infinito e ...

(5) Determinare le singolarità isolate, la loro natura e, per ciascuna singolarità calcolare il rispettivo residuo.

$$(a)\ \frac{1-\cosh z}{z^3} \qquad (b)\ \frac{1}{z(e^z-1)} \qquad (c)\ \frac{z^2-4\pi^2}{z(1-\cos z)}$$

Risp: (a) $z=0$, polo 1, $\mathrm{Res}(f,0)=-1/2$. (b) L'insieme delle singolarità è $S=\{z_k=i2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. $z=0$, polo 2, $\mathrm{Res}(f,0)=-1/2$. $z=z_k=i2k\pi$, con $k\neq 0$, polo 1, $\mathrm{Res}(f,0)=-i/(2k\pi)$. (c) L'insieme delle singolarità è $S=\{z_k=2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. $z=0$, polo 3, $\mathrm{Res}(f,0)=2(1-\pi^2/3)$. $z=\pm 2\pi$, polo 1, $\mathrm{Res}(f,\pm 2\pi)=4$. $z=z_k=2k\pi$ con $|k|>1$, polo 2, $\mathrm{Res}(f,z_k)=2(1+1/k^2)$.

(6) Trovare tutte le singolarità isolate e determinarne la natura (per i poli trovare l'ordine)

$$(a)\ \frac{(z+1)\,z}{\sin^2 z} \qquad (b)\ \frac{(z+1)}{\sin^3(\pi z)} \qquad (c)\ \frac{z(z^2+4)\sin z}{(e^{\pi z}-1)^2} \qquad (d)\ \frac{1}{e^{e^z}-1}$$

Risp: (a) $z=0$ polo ordine 1, $z=k\pi$ con k intero $k\neq 0$ polo ordine 2. (b) $z=-1$ polo ordine 2, $z\in\mathbb{Z}$, $z\neq -1$ polo ordine 3. (c) $z=0$ eliminabile, $z=\pm 2i$ polo ordine 1, $z=\pm 4i$, $\pm 6i$, $\pm 8i$, $\ldots$ polo ordine 2. (d) $z=\log(2k\pi)+i\pi(n+1/2)$ con k intero, $k\geq 1$ e $n\in\mathbb{Z}$, polo ordine 1.

(7) Usando il risultato del problema precedente, calcolare

$$(a)\ \int_{|z-2|=3}\frac{(z+1)\,z}{\sin^2 z}\,dz \qquad (b)\ \int_{|z+1/2|=1}\frac{(z+1)}{\sin^3(\pi z)}\,dz$$

Risp: (a) $4\pi(1+\pi)i$. (b) i.

(8) Calcolare

$$(a)\ \int_{|z|=2}\frac{dz}{\sinh(2z)} \qquad (b)\ \int_{|z|=2}\frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)}\,dz \qquad (c)\ \int_{|z|=3}\frac{z^3(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)}\,dz$$

Risp: (a) $-\pi i$. (b) $4\pi i$. (c) $-3\pi i$.

[RS] (9) Si consideri la funzione

$$f(z)=\frac{1}{z^2\,\sinh z}\,.$$

(a) Trovare tutte le singolarità isolate di f e determinarne la natura (per i poli trovare l'ordine).
(b) Calcolare $\int_\gamma f$ in cui $\gamma(t):=i\pi/2+2e^{it}$, $0\leq t\leq 2\pi$.

Risp: (a) $z=0$ polo 3, $z=ik\pi$, $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, polo 1. (b) $2\pi i\Big[\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{6}\Big]$.

[RS] (10) Calcolare

$$(a)\ \int_{|z|=3}\frac{z}{(z-4)\,(z-2)\,(z+1)}\,dz \qquad (b)\ \int_{|z-1|=1}\frac{z^2}{z^4+1}\,dz$$

Risp: (a) $-\frac{4}{5}\pi i$. (b) $\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$.

[RS] (11) Trovare tutte le singolarità isolate di f. Per ciascuna di esse determinarne la natura (per i poli trovare l'ordine) e calcolare il residuo

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2\,\sin z}\,.$$

Risp: $z_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, polo 1, $\mathrm{Res}(f,z_k)=(-1)^n\frac{e^{n\pi}}{n^2\pi^2}$. $z=0$, polo 3, $\mathrm{Res}(f,0)=2/3$.

[RS] (12) Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2\,dz}{e^{\pi z}+1} \qquad \gamma(t):=1+2i+2e^{it},\ 0\leq t\leq 2\pi\,.$$

Risp: $20i$.

13-14/S2 (13) Calcolare

$$\int_{|z|=2}\frac{z^3\left(z^2+3z+1\right)}{z^5+1}\,dz\,.$$

Risp: $6\pi i$.