Serie e trasformate di Fourier

(1) Verificare i seguenti sviluppi in serie di Fourier

$$\operatorname{sgn}(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)} \qquad\qquad x \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}$$

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}$$

Usando l'uguaglianza di Parseval, calcolare $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ e $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

(2) Sviluppare in serie di Fourier degli esponenziali in $[-\pi,\pi]$ la funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots = \frac{1}{2}\big(\pi\coth\pi - 1\big)$$

(3) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\ell,\ell]$ la funzione $f(x) = x^2$, ed utilizzare il risultato per calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$.

(4) Sia $h : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione analitica in un anello aperto che contiene la circonferenza unitaria e sia $f(\vartheta) := h(e^{i\vartheta})$. Dimostrare che lo sviluppo in serie di Fourier per f può essere derivato direttamente dalla serie di Laurent per h.

(5) Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo $[0,\pi]$ utilizzando (1) soltanto i coseni (2) soltanto i seni. Dire, in ciascun caso, per quali valori di $x \in [0,\pi]$ la serie di Fourier considerata converge ad f.

$$(a)\ \ f(x) = 1 \qquad\qquad (b)\ \ f(x) = \sin x \qquad\qquad (c)\ \ f(x) = x^2$$

Risp: (a1) $1 \sim 1$. (a2) $1 \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin[(2k+1)x]$. (b1) $\sin x \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$. (b2) $\sin x \sim \sin x$. (c1) $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$. (c2) $x^2 \sim 2\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} - 2\frac{1-(-1)^k}{(k\pi)^3}\right]\sin(kx)$.

(6) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 1 - 2|x|/\pi & \text{se } |x| \le \pi/2 \\ 0 & \text{se } |x| \in (\pi/2,\pi]. \end{cases}$$

Scrivere esplicitamente i primi 7 termini dello sviluppo.
Risp:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(4k+2)x]}{(4k+2)^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos(x)}{1^2} + 2\frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + 2\frac{\cos(6x)}{6^2} + \frac{\cos(7x)}{7^2} + \frac{\cos(9x)}{9^2} + \cdots\right] \end{aligned}$$

(7) Disegnare il grafico e sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < \pi/2 \\ |x| - \pi/2 & \text{se } |x| \ge \pi/2. \end{cases}$$

Scrivere, oltre allo sviluppo completo, tutti i termini fino a $k = 7$ *in modo esplicito*, vale a dire

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + \cdots + a_7\cos(7x) + \cdots$$

Risp:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big[-\frac{2\cos[(2k-1)x]}{(2k-1)^2} + \frac{\cos[(4k-2)x]}{(2k-1)^2}\Big] \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{\cos(2x)}{\pi} - \frac{2}{9\pi}\cos(3x) - \frac{2}{25\pi}\cos(5x) + \frac{1}{9\pi}\cos(6x) - \frac{2}{49\pi}\cos(7x) + \cdots \end{aligned}$$

Volta la pagina ☞

[SF] (8) Sviluppare la funzione $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Scrivere esplicitamente i primi 6 termini non nulli dello sviluppo. Utilizzare il risultato per calcolare la somma delle seguenti serie

(a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$
(b) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots$

Risp: (a) $\frac{\pi}{4}$. (b) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

[SF] (9) Per ciascuna delle seguenti funzioni $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ sia S_n la somma parziale n–esima della serie di Fourier associata. Calcolare il limite $S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

$$(a)\ \ f(x) = x^3 \qquad\qquad (b)\ \ f(x) = H(x)\,(1 - x^2) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ 1 - x^2 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(10) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| \le 1 \\ 0 & \text{se } 1 < |x| \le \pi \end{cases}$$

Sfruttando la convergenza nell'origine, si ottiene una formula che dà il valore di una particolare serie numerica. Scrivere questa formula.

Risp: $f(x) \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k}{k^2} \cos(kx)$. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k}{k^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$.

(11) Per ciascuna delle seguenti funzioni $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ sia S_n la somma parziale n–esima della serie di Fourier associata. Calcolare il limite $S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

$$(a)\ \ f(x) = x \qquad (b)\ \ f(x) = e^x \qquad (c)\ \ f(x) = x^2 \qquad (d)\ \ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ 1 - x & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Risp: (a) $S(x) = x$ se $x \in (-\pi, \pi)$, $S(-\pi) = S(\pi) = 0$. (d) $S(x) = 0$ se $x \in (-\pi, 0)$, $S(x) = 1 - x$ se $x \in (0, \pi)$, $S(0) = 1/2$, $S(-\pi) = S(\pi) = (1 - \pi)/2$.

(12) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{per } x \in (0, \pi] \\ -\pi - x & \text{per } x \in [-\pi, 0) \end{cases}.$$

Risp: $2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/k$.

13-14/E2 (13) La funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ \cos(x/4) & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

ha il seguente sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2 - 1} \cos(kx) + \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(\sqrt{2}(-1)^k - 2\big)k}{16k^2 - 1} \sin(kx)\,.$$

Calcolare: (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2-1}$; (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2-1}$; (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{64k^2-1}$.

Risp: (a) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. (b) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$. (c) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

14-15/E2 (14) Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ della funzione $f(x) = H(x)\,e^{-x}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside

$$H(x)\,e^{-x} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \qquad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$; (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$; (c) $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[|a_k|^2 + |b_k|^2\big]$.