Serie e trasformate di Fourier/3

(1) Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad \frac{1}{(x+2+5i)^3} \qquad\qquad (b)\quad x^2 e^{-x^2+3ix}\,.$$

Risp: (a) $i\pi e^{(-5+2i)t}t^2H(t)$. (b) $-\frac{1}{4}\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}(t-3)^2}\big(t^2-6t+7\big)$.

(2) Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2} \qquad\qquad (b)\quad xe^{-x^2+5ix}\,.$$

Risp: (a) $\pi\, e^{-|\lambda-1|+i(\lambda-1)}$. (b) $-i\sqrt{\pi}/2\, e^{-\frac{1}{4}(t-5)^2}(t-5)$.

(3) Dimostrare che, se $a,b\in\mathbb{R}$ con $b\neq 0$ e n è un intero positivo, si ha

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{(x+a+ib)^n}\right](\lambda) = -\operatorname{sgn}(b)\,(2\pi i)\,\frac{(-i\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}\,H(\lambda b)\,e^{-\lambda b}\,e^{i\lambda a}$$

in cui H è la funzione a gradino di Heaviside. Sugg: si verifichi innanzitutto la formula per $n=1$ e si tenga presente l'identità

$$\frac{1}{(x+a+ib)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,D^{n-1}\left(\frac{1}{x+a+ib}\right)\,. \qquad ①$$

☆ (4) Verificare che la secante iperbolica è, a parte fattori di scala, invariante sotto l'azione della trasformata di Fourier. Più precisamente si ha:

$$\mathcal{F}[\operatorname{sech}(x)](\lambda) = \pi\operatorname{sech}\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)$$

(Sugg: si può usare il metodo dei residui. Non voglio rovinarvi l'esercizio suggerendovi il cammino di integrazione. Al fine di "chiudere" correttamente questo cammino, ricordate che $|\cosh(x+iy)|^2 = \cosh^2 x - \sin^2 y \geq \cosh^2 x - 1$. Pensate ad un caso analogo).

(5) Dato un numero reale $\alpha>0$, sia

$$\begin{aligned}&e(x) := H(x)\,e^{-\alpha x}\\ &e_2(x) := (e*e)(x) \qquad e_3(x) = (e*e*e)(x) \qquad \cdots \qquad e_n(x) = (e*\cdots*e)(x)\,,\end{aligned}$$

in cui H è la funzione a gradino di Heaviside. Dimostrare che

$$e_n(x) = H(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\alpha x}\,.$$

(6) Si consideri il *nucleo del calore*

$$K_T(x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}}\,.$$

Verificare che

$$(a)\quad \widehat{K}_T(s) = e^{-\frac{Ts^2}{2}} \qquad\qquad (b)\quad K_{T_1}*K_{T_2} = K_{T_1+T_2}$$

[RUDIM] (7) Dimostrare che, se $a>0$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi a^2}{4}\,.$$

(Sugg: usare il teorema di Plancherel).

★ (8) (Facoltativo). Trovare una funzione $f \in L_1(\mathbb{R})$ la cui trasformata di Fourier $\hat{f}$ tende a zero all'infinito più lentamente di $(\log x)^{-2}$. Più precisamente bisogna far vedere che esiste una successione (λ_k) di numeri reali tale che $\lambda_k \to +\infty$ e tale che

$$\lim_{k\to\infty} [\log(\lambda_k)]^2 \, \hat{f}(\lambda_k) = +\infty \,. \qquad ①$$

(Sugg: cercare f della forma $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \mathbb{1}_{[-a_n, a_n]}$, in cui $a_n \to 0$ e $c_n \to \infty$, e aggiustare i coefficienti a_n e c_n in modo tale che: (1) $f \in L_1(\mathbb{R})$ e (2) valga la ① per un'opportuna successione λ_k).

☆ (9) Sia H_n l'ennesimo polinomio di Hermite e sia ψ_n la corrispondente *funzione di Hermite* definita come

$$\psi_n(x) := C_n \, e^{-x^2/2} H_n(x) \qquad \text{in cui } C_n = (\sqrt{\pi}\, 2^n \, n!)^{-1/2}.$$

Ricordando che vale la relazione

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \,, \qquad ①$$

si dimostri che ψ_n è un autofunzione dell'operatore trasformata di Fourier con autovalore $\sqrt{2\pi}(-i)^n$, vale a dire

$$\mathcal{F}[\psi_n] = \sqrt{2\pi}(-i)^n \, \psi_n \,. \qquad ②$$

(Sugg: Dalla ① segue che $\psi_{n+1} = [2(n+1)]^{-1/2} \, (x\psi_n - \psi_n')$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier si ottiene una relazione analoga fra $\hat{\psi}_{n+1}$ e $\hat{\psi}_n$. A questo punto è semplice dimostrare la ② per induzione).

☆ (10) (Il principio di indeterminazione di Heisenberg). Si consideri lo spazio delle funzioni di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ con il prodotto scalare canonico $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$. Sia $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ di norma unitaria

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \, dx = 1 \,.$$

e sia $\varphi(\lambda) := \mathcal{F}(\psi)(\lambda)/\sqrt{2\pi}$. Anche φ ha norma unitaria (giusto?). Si assuma inoltre che valgano le condizioni

$$\int_{\mathbb{R}} x \, |\psi(x)|^2 \, dx = 0 \qquad\qquad \int_{\mathbb{R}} \lambda \, |\varphi(\lambda)|^2 \, d\lambda = 0 \,. \qquad ①$$

(Data una ψ arbitraria di norma 1 è sempre possibile definire $\tilde{\psi}(x) = e^{iax}\, \psi(x-b)$ in modo tale che le condizioni ① siano verificare per $\tilde{\psi}$). Interpretando $|\psi(x)|^2$ e $|\varphi(\lambda)|^2$ come densità di probabilità, le ① affermano che le variabili x e λ hanno media nulla. Per questo motivo, le rispettive varianze sono date da

$$\sigma_x^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, |\psi(x)|^2 \, dx = \|x\psi\|^2 \qquad\qquad \sigma_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \, |\varphi(\lambda)|^2 \, d\lambda = \|\lambda\varphi\|^2 \,.$$

Dimostrare che[1] vale il *principio di indeterminazione*: $\sigma_x \, \sigma_\lambda \geq 1/2$.
(Sugg: usando le proprietà della trasformata di Fourier, dimostrare che $\|\lambda\varphi\|^2 = \|\psi'\|^2$. Questo fatto, insieme alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,[2] implica che $\sigma_x^2 \sigma_\lambda^2 \geq |\langle x\psi, \psi'\rangle|^2$. Per stimare quest'ultima quantità usare infine il fatto che $|z| \geq |\operatorname{Re} z| = |z + \overline{z}|/2$).

[1]in un ipotetico universo nel quale $\hbar = 1$ ...
[2]non è un errore di battitura, gli Schwar(t)z sono 2, uno con la "t" e uno senza.