Distribuzioni/1

(1) Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che la derivata nel senso delle distribuzioni di $g(|x|)$ è data da $g'(|x|)\operatorname{sgn}(x)$.

(2) Sia $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dimostrare (per induzione) che

$$h(x)\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}h^{(k)}(0)\,\delta_0^{(n-k)}$$

(3) Dimostrare che: (1) $x^n\delta_0^{(n)} = (-1)^n n!\,\delta_0$; (2) Se $p > n$ allora $x^p\delta_0^{(n)} = 0$.

(4) Dato un intero positivo n, esprimere la distribuzione $x^{n-1}\,\delta_0^{(n)}$ come combinazione lineare (a coefficienti costanti) di δ_0 e/o delle sue derivate.

Risp: $(-1)^{n-1}n!\,\delta_0'$.

(5) Calcolare le seguenti distribuzioni ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$(a)\ \ e^{3x}\,\delta_0''$ $\qquad (b)\ \ \sin x\,|x|'''$ $\qquad (c)\ \ D\big[\,xP(1/x)\,\big]$ $\qquad (d)\ \ D\big[\,x\lfloor x\rfloor\,\big]$

Risp: (a) $\delta_0'' - 6\delta_0' + 9\delta_0$. (b) $-2\delta_0$. (c) 0. (d) $\lfloor x\rfloor + \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\delta_k$.

(6) Calcolare le seguenti distribuzioni ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$(a)\ \ D\big[\operatorname{sgn} x\,\cos x\big]$ $\qquad (b)\ \ x\,\cos x\,\delta_0''$ $\qquad (c)\ \ x^{10}\,\delta_0^{(4)}$ $\qquad (d)\ \ D\big[\sin(\pi x)\,\lfloor x\rfloor\,\big]$

Risp: (a) $2\delta_0 - \sin|x|$. (b) $-2\delta_0'$. (c) 0. (d) $\pi\cos(\pi x)\lfloor x\rfloor$.

(7) Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x)

$(a)\ \ D[x^2\,(\log|x|)']$ $\qquad (b)\ \ D\big[\,x^3\,(\log|x|)'\,\big]$ $\qquad (c)\ \ D[\cos x\ \operatorname{sgn}(x)]$

$(d)\ \ e^{\sin x}\,\delta_0'$ $\qquad (e)\ \ D\big(e^{2x}\,|x|'''\big)$ $\qquad (f)\ \ D^2\big(e^{|x|}\big)$

$(g)\ \ D^5\big(e^{\cos x+3}\,\delta_0\big)$ $\qquad (h)\ \ D^3\big[\,\cos(x^2)\,\delta_0'\,\big]$ $\qquad (i)\ \ xD(\log|x|)$

$(j)\ \ x^4\delta_0^{(4)}$ $\qquad (k)\ \ e^{-x^2}\,|x|''''$ $\qquad (l)\ \ e^{2x}\,D^5(|x|)$

$(m)\ \ D[\operatorname{sgn}(x-1)\operatorname{sgn}(x+4)]$ $\qquad (n)\ \ D[\sin x\,\delta_0']$ $\qquad (o)\ \ D^4[e^{x^2}\,\delta_0'']$

$(p)\ \ D^4\big[e^{x^2}\,D^4(|x|)\big]$ $\qquad (q)\ \ D\lfloor e^x\rfloor$ $\qquad (r)\ \ D^3\big(x\,e^{-|x|}\big)$

$(s)\ \ D^4\big[\sin|x|\big]$

Risp: (a) 1. (b) $2x$. (c) $2\delta_0 - \sin|x|$. (d) $\delta_0' - \delta_0$. (e) $2\delta_0'' - 4\delta_0'$. (f) $e^{|x|} + 2\delta_0$. (g) $e^4\delta_0^{(5)}$. (h) $\delta_0^{(4)}$. (i) 1. (l) $2\,\delta_0''' - 12\,\delta_0'' + 24\,\delta_0' - 16\,\delta_0$. (m) $-2\delta_{-4} + 2\delta_1$. (r) $e^{-|x|}(3-|x|) - 4\delta_0$. (s) $\sin|x| - 2\delta_0 + 2\delta_0''$.

[DI] (8) Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$(a)\ \ D[\,\cos(x^2)\ \operatorname{sgn}(x)\,]$ $\qquad (b)\ \ D^2\big(e^{|x+1|}\big)$ $\qquad (c)\ \ D\lfloor e^x\rfloor$

$(d)\ \ D^4[\,x^5\delta_0^{(5)}\,]$ $\qquad (e)\ \ D^4[\,e^{x^2}\,\delta_0''\,]$

[DI] (9) Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$(a)\ \ D^3\big(xe^x\,\delta_0''\big)$ $\qquad (b)\ \ D^8\big(x^4\,\delta_0^{(5)}\big)$ $\qquad (c)\ \ D^2(|\sin x|)$

Risp: (a) $2\big(\delta_0^{(3)} - \delta_0^{(4)}\big)$. (b) $120\,\delta_0^{(9)}$. (c) $-|\sin x| + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{k\pi}$.

(10) Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$(a)\ \ D^2[\,\sin(|x|)\,]$ $\qquad (b)\ \ D^3[\,x\,e^{2x}\delta_0''\,]$ $\qquad (c)\ \ D[\,e^{-x^2}\,\lfloor x\rfloor\,]$

Risp: (a) $-\sin(|x|) + 2\delta_0$. (b) $4\delta_0^{(3)} - 2\delta_0^{(4)}$. (c) $-2xe^{-x^2}\lfloor x\rfloor + \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-k^2}\delta_k$.

Volta la pagina ☞

11-12/S1 (11) Data la distribuzione $\varphi = \operatorname{sgn}(x)\, e^{-x^2}$, calcolare $D^6\,[\varphi' + 2x\varphi]$.

Risp: $2\,\delta_0^{(6)}$.

12-13/S1 (12) Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D^3(|1 - x^2|)$$

Risp: $-4\,\big[(\delta_{-1} - \delta_1) - (\delta'_{-1} + \delta'_1)\big]$.

12-13/S2 (13) Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D\left[e^{|x|} D^2\left(xe^{-|x|}\right)\right]$$

Risp: $1 - 4\delta_0$.

13-14/S1 (14) Sia $F(x) = H(x)\,\sin(\omega x)$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside e $\omega > 0$. Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $F'' + \omega^2 F$.

Risp: $\omega\delta_0$.

13-14/S2 (15) Sia $F(x) = \sin(|x|)$, Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $F'' + F$.

Risp: $2\delta_0$.

(16) Dato $n \in \mathbb{N}$, scrivere $(1 + x)^n \delta_0^{(3)}$ come combinazione lineare (con coefficienti costanti) di delta di Dirac e delle sue derivate.

(17) Siano m, n due interi non negativi. Dimostrare che

$$x^m\,\delta_0^{(n)} = \begin{cases} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!}\,\delta_0^{(n-m)} & \text{se } n \geq m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$