

# Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2/C

Filippo Cesi – 2020–21

|         |  |
|---------|--|
| Nome    |  |
| Cognome |  |

| problema           | voto |
|--------------------|------|
| 1                  |      |
| 2                  |      |
| 3                  |      |
| 4                  |      |
| 5                  |      |
| totale             |      |
| test               |      |
| voto in trentesimi |      |

## Regolamento:

- (1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.
- (2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.
- (3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.
- (4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (8 pt).<sup>1</sup> Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{2n} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (2+3i)^n z^n.$$

*Risp:* (a)  $1/2$ . (b)  $1/\sqrt{13}$ .

(2) (7 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=4} \frac{e^{2z}(z+\pi)}{z \sin z} dz.$$

*Schema di soluzione.* (a) Sia

$$f(z) := \frac{e^{2z}(z+\pi)}{z \sin z}.$$

Le singolarità di  $f$  che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

|            |                   |
|------------|-------------------|
| $z = 0$    | polo di ordine 2  |
| $z = -\pi$ | eliminabile       |
| $z = +\pi$ | polo di ordine 1. |

Quindi

$$\int_{|z|=4} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, \pi)] = 2\pi i [1 + 2\pi - 2e^{2\pi}].$$

(3) (7 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2(z^2+1)}{(1+z^3)(3z^2+2)} dz$$

*Risp:*  $2i\pi/3$ .

(4) (7 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+4)^2} dx.$$

*Soluzione.* Chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano superiore, otteniamo

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+4)^2} dx \\ &= \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2+4)^2} dx \\ &= \text{Im} \int \frac{z e^{iz}}{(z^2+4)^2} dz \\ &\quad \curvearrowright \\ &= \text{Im} [2\pi i \text{Res}(g(z), 2i)], \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>1 pt = 0.5 voto

in cui

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 4)^2}.$$

La parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent di  $g$  nel punto  $z = 2i$  è data da

$$g(z) = -\frac{i}{8e^2(z-2i)^2} + \frac{1}{8e^2(z-2i)} + \mathcal{O}(1).$$

Otteniamo dunque

$$I = \operatorname{Im} \left( 2\pi i \frac{1}{8e^2} \right) = \frac{\pi}{4e^2}.$$

- (5) (7 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sulla cosiddetta “Stima di Cauchy” sulle derivate di una funzione analitica.