

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1/F

Filippo Cesi – 2020-21

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

- (1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.
- (2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.
- (3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.
- (4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi

(1) (7 pt). Calcolare la seguente distribuzione, semplificando il più possibile il risultato

$$D[e^{|x|} D^2(\cos x e^{-|x|})].$$

Risp: $2 \cos x \operatorname{sgn} x - 2\delta'_0$.

(2) (8 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ della funzione $f(x) = H(x)(1+x)$

$$H(x)(1+x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Calcolare: (a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$; (b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$; (c) $\sum_{k=1}^{\infty} [|a_k|^2 + |b_k|^2]$.

Soluzione. ♣♣♣

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1+x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\pi + \frac{\pi^2}{2} \right) = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Sfruttando la convergenza puntuale in $x = 0$ si ha

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} (f(0^-) + f(0^+)) = \frac{1}{2}$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} - \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Sfruttando la convergenza puntuale in $x = \pi$ si ha

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^k = \frac{1}{2} (f(\pi) + f(-\pi)) = \frac{1}{2} (1 + \pi)$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^k = \frac{1}{2} (1 + \pi) - \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Uso l'uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2). \quad (0.1)$$

Poiché

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\pi} (1+x)^2 dx = \int_0^{\pi} (1+2x+x^2) dx = \pi + \pi^2 + \frac{\pi^3}{3},$$

ottengo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) &= 1 + \pi + \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)^2 \\ &= 1 + \pi + \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{24} \pi^2. \end{aligned}$$

(3) (7 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{e^{-ix}}{(2x + 5i)^2}$.

Risp: $-\frac{\pi}{2} H(\lambda + 1) (\lambda + 1) e^{-5(\lambda+1)/2}$.

(4) (7 pt). Sia $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e sia

$$I(a) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+iax} \delta((x^{2n} - 1) e^{-x^2}) dx.$$

Calcolare il massimo della funzione $f(a) := |I(a)|$ per $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione. La funzione $b(x) := (x^{2n} - 1) e^{-x^2}$ si annulla nei punti $x = \pm 1$. Inoltre si ha

$$b'(x) = e^{-x^2} (2nx^{2n-1} - 2x(x^{2n} - 1)) \quad |b'(\pm 1)| = \frac{2n}{e},$$

da cui si ottiene

$$\delta(b(x)) = \frac{e}{2n} (\delta_1 + \delta_{-1}).$$

Quindi

$$I(a) = \frac{e}{2n} \left(\left[e^{-x^2+iax} \right]_{x=1} + \left[e^{-x^2+iax} \right]_{x=-1} \right) = \frac{e}{2n} (e^{-1+ia} + e^{-1-ia}) = \frac{\cos a}{n}.$$

Otteniamo così che la funzione $f(a) = |I(a)| = |\cos(a)/n|$ ha come valore massimo $1/n$.

(5) (7 pt). Sia $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Dimostrare che $\mathcal{F}^a \mathcal{F} f = f$ ($\mathcal{F}^a$ è l'antitrasformata di Fourier).