Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2/C

Filippo Cesi – 2020–21

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (8 pt).[1] Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, e^{2n}}\, z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2\,(2+3i)^n z^n\,.$$

Risp: (a) e. (b) $1/\sqrt{13}$.

(2) (8 pt). Calcolare

$$\int_{|z-1|=2} \frac{z+1}{z\sin(\pi z/2)}\, dz$$

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{1+z}{z\,\sin(\pi z/2)}\,.$$

Le singolarità di f che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$\begin{array}{ll} z=0 & \text{polo di ordine } 2 \\ z=2 & \text{polo di ordine } 1\,. \end{array}$$

Quindi

$$\int_{|z-1|=2} f(z)\, dz = 2\pi i\,\big[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,2)\big] = 2\pi i\left(\frac{2}{\pi} - \frac{3}{\pi}\right) = -2i\,.$$

(3) (7 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2/3}}{x^2+6x+18}\, dx$$

Risp: $\sqrt[3]{2}\, 3^{-5/6}\,\pi$. (Vedi esercizi più o meno identici sulle "Lezioni" o su esami anni precedenti).

(4) (7 pt). Enunciare e dimostrare il teorema Fondamentale dell'Algebra

(5) (6 pt). Fare un esempio di una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ intera, non identicamente nulla, tale che $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Alternativamente, se una tale funzione non esiste, dimostrare che non esiste.

Soluzione. Suggerimento: riallacciarsi alla dimostrazione del teorema fondamantale dell'algebra.

[1] 1 pt = 0.5 voto